

(B) Hipérbole

Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos de um plano Π , $2c$, sua distância, e a um número real tal que $0 < a < c$. O lugar geométrico dos pontos X do plano Π tais que

$$|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a$$

chama-se hipérbole. Cada um dos pontos F_1 e F_2 é chamado foco da hipérbole, e o segmento F_1F_2 é chamado segmento focal, seu ponto médio, centro da hipérbole, e $2c$, distância focal. A reta F_1F_2 chama-se reta focal.

Escolhamos um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$.

$$\begin{aligned} \text{Então } X = (x, y) \in \text{hipérbole} &\Leftrightarrow d(X, F_1) - d(X, F_2) = \pm 2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \end{aligned}$$

Podemos provar, fazendo contas similares ao caso da elipse, que

$$\boxed{X = (x, y) \in \text{hipérbole} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}, \quad \begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ c > b > 0 \\ c > a > 0 \end{aligned}$$

A equação acima chama-se equação reduzida da hipérbole.

Os pontos $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$ pertencem a hipérbole e são chamados vértices (são os pontos em que a reta focal intercepta a hipérbole).

Vamos fazer um esboço da hipérbole.

Observe que $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$

$$\Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Portanto a hipérbole é união dos gráficos das funções

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{x^2 - a^2}$$

Vamos considerar a função $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ (o gráfico de $y = -\sqrt{x^2 - a^2}$ é simétrico ao gráfico de $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ com respeito ao eixo x).

O domínio de definição de $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ é

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - a^2 \geq 0 \} =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$$

Temos

$y' = \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, portanto a função é crescente em $]a, +\infty[$ e é decrescente em $] -\infty, -a[$; não tem derivada nos pontos $x = -a$ e $x = a$.

Para analisar o comportamento da função em $\pm\infty$, observe que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}}{\frac{b}{a} x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}}{-\frac{b}{a} x} = 1,$$

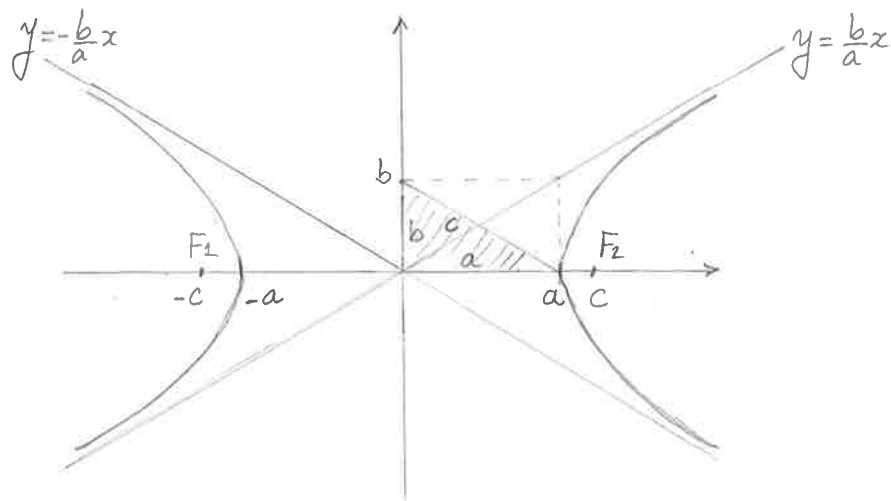
Ou seja, as retas $y = \frac{b}{a} x$ e $y = -\frac{b}{a} x$ são retas assintotas da hipérbole (por simetria, elas são assintotas de $y = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$).

Observe que

$$\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} < \frac{b}{a} x \quad \text{se } x > 0$$

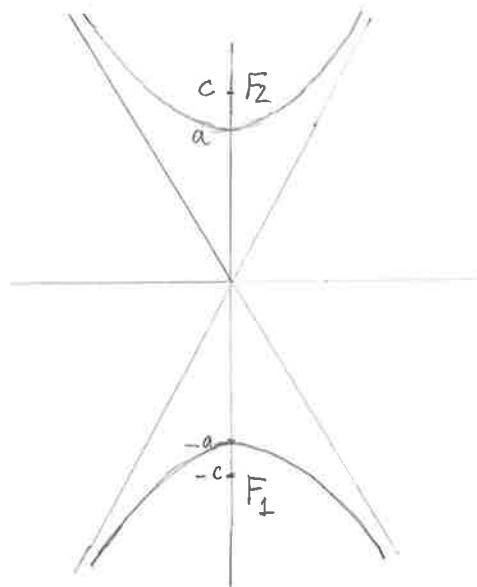
$$\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} < -\frac{b}{a} x \quad \text{se } x < 0$$

Podemos juntar as informações acima para obter o seguinte esboço da hipérbole



Podemos ter escolhido um sistema de coordenada em relação ao qual $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$. Neste caso a equação reduzida da hipérbole é $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

As assíntotas são dadas por $y = \frac{a}{b}x$ e $y = -\frac{a}{b}x$



Proposição

Uma equação da forma $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1$ descreve uma hipérbole em relação a um sistema ortogonal de Coordenadas Σx , e somente se, os números p e q são de sinal contrário.