

SMA0355 - Aula 18 - 24.05.2022

Teorema fundamental para integrais de linha

Lembre-se de que o Teorema Fundamental do Cálculo afirma que

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Se considerarmos o vetor gradiente ∇f de uma função de duas ou três variáveis como uma espécie de derivada, então o teorema seguinte pode ser visto como uma versão do teorema fundamental do cálculo para as integrais de linha.

Teorema 1 (Teorema Fundamental para Integrais de Linha). Seja C uma curva suave por trechos com parametrização $r(t)$, $a \leq t \leq b$. Seja f uma função escalar de duas ou três variáveis com derivadas parciais de primeira ordem que existem e são contínuas em C . Então,

$$\int_C \nabla f \cdot dr = f(r(b)) - f(r(a)). \quad (1)$$

Demonstração. Vamos primeiro demonstrar o teorema para curvas suaves e para funções escalares f de três variáveis. Usando a definição de integral de linha de um campo vetorial, temos

$$\begin{aligned} \int_C \nabla f \cdot dr &= \int_a^b \nabla f(r(t)) \cdot r'(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(r(t)) dt \\ &= f(r(b)) - f(r(a)), \end{aligned}$$

onde o penúltimo passo segue da Regra da Cadeia e o último passo segue do Teorema Fundamental do Cálculo. Para demonstrar o teorema para curvas suaves por trechos, basta subdividir C em um número finito de curvas suaves e somar as integrais resultantes.

Exemplo 1. Determine o trabalho realizado pelo campo gravitacional

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

ao mover uma partícula de massa m do ponto $(3, 4, 12)$ para o ponto $(2, 2, 0)$ ao longo de uma curva suave por partes C .

Resolução. Vimos na Aula 17 que $\vec{F}$ é um campo vetorial conservativo com $\vec{F} = \nabla f$, onde

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Portanto, pelo teorema acima, o trabalho realizado é

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12) \\ &= \frac{mMG}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2}} - \frac{mMG}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} \\ &= mMG \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13} \right). \end{aligned}$$

Note que para realizar este cálculo não é preciso parametrizar a curva de integração, nem mesmo é preciso conhecer a curva de integração, basta apenas conhecer os seus pontos inicial e final.

Independência do Caminho

Suponha que C_1 e C_2 sejam curvas suaves por partes (denominadas caminhos) que têm o mesmo ponto inicial A e o mesmo ponto final B . Em decorrência do Teorema Fundamental para Integrais de Linha, temos

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

sempre que ∇f for contínua. Em outras palavras, **a integral de linha de um campo vetorial conservativo depende somente das extremidades da curva.**

Em geral, se $\vec{F}$ for um campo vetorial contínuo com domínio D , dizemos que a integral de linha $\int_C \vec{F} \cdot d\mathbf{r}$ é **independente do caminho** se $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\mathbf{r}$ para quaisquer dois caminhos C_1 e C_2 em D que tenham os mesmos pontos iniciais e finais. Com essa terminologia, podemos dizer que *as integrais de linha de campos vetoriais conservativos são independentes do caminho.*

Exemplo 2. Determine se o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (x^2y, y + 5)$ independe do caminho ou não.

Resolução. Consideremos $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e $(x_1, y_1) = (1, 1)$. Seja C_1 a curva com a parametrização $\gamma_1(t) = (t, t)$, $0 \leq t \leq 1$, e seja C_2 a curva com a parametrização $\gamma_2(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$. Então

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \vec{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt \\ &= \int_0^1 (t^3, t + 5) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 (t^3 + t + 5) dt \\ &= \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + 5t \right) \Big|_0^1 = \frac{23}{4}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{F}(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt \\
 &= \int_0^1 (t^4, t^2 + 5) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 (t^4 + 2t^3 + 10t) dt \\
 &= \left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{2} + 5t^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{57}{10}.
 \end{aligned}$$

Sendo $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, o valor de uma integral de linha de $\vec{F}$ depende do caminho entre dois pontos dados. Portanto, $\vec{F}$ não é independente do caminho. Em consequência, $\vec{F}$ não é conservativo.

A curva C é uma curva **fechada** se houver uma parametrização $r(t)$, $a \leq t \leq b$ de C tal que a parametrização percorra a curva exatamente uma vez e $r(a) = r(b)$, ou seja, seu ponto final coincide com seu ponto inicial (veja a Figura 1).

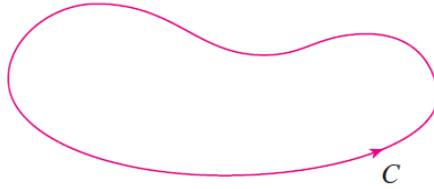


Figura 1: Uma curva fechada

Teorema 2. A integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ independe do caminho no domínio F se, e somente se, $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para toda curva fechada C em D .

Demonstração. Se $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho em D e C é uma curva fechada em D , podemos escolher quaisquer dois pontos A e B sobre C e olhar C como composta por um caminho C_1 de A a B seguido de um caminho C_2 de B a A . (Veja a Figura 2.) Então

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

pois C_1 e $-C_2$ têm os mesmos pontos inicial e final, onde $-C_2$ é a curva C_2 percorrida no sentido contrário de A para B .

Por outro lado, suponha que $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para qualquer curva fechada C em D . Sejam dois caminhos quaisquer C_1 e C_2 que tenham os mesmos pontos iniciais

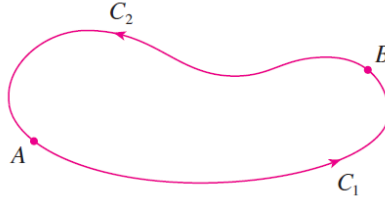


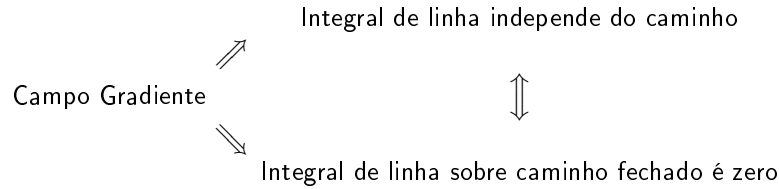
Figura 2: Uma curva fechada

e finais A e B em D e defina C como a curva fechada constituída por C_1 seguida por $-C_2$. Então

$$0 = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Portanto, $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, e isto completa a demonstração.

Resumo



Em verdade, essas três propriedades são equivalentes no sentido que cada uma implica outras duas. Mas para isso, devemos exigir que o domínio do campo vetorial seja um conjunto aberto e conexo por caminhos, segundo as definições: um conjunto D é aberto se para todo ponto P em D existe uma bola aberta com centro em P inteiramente contida em D . (Portanto, D não tem nenhum ponto de sua fronteira.). Dizemos que D é conexo por caminhos se quaisquer dois pontos em D podem ser ligados por um caminho contínuo contido em D .

O teorema a seguir diz que todos os campos vetoriais independentes do caminho num conjunto aberto conexo por caminho são conservativos.

Teorema 3. Suponha que $\vec{F}$ seja um campo vetorial contínuo em uma região aberta conexa por caminhos D . Se $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ for independente do caminho em D , então $\vec{F}$ é um campo vetorial conservativo em D , ou seja, existe uma função escalar f tal que $\nabla f = \vec{F}$.

Demonstração. Provamos o teorema para campos vetoriais em $\mathbb{R}^2$. A prova para campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$ é semelhante. Para mostrar que $F = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$

é conservativo, devemos encontrar uma função potencial f para $\vec{F}$. Para isso, seja $A = (a, b)$ um ponto fixo em D . Para qualquer ponto $(x, y) \in D$, seja C um caminho contínuo de (a, b) a (x, y) contido em D . (Tal caminho existe, pois D região é uma conexa por caminhos.) Defina $f(x, y)$ por

$$f(x, y) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

(Observe que esta definição de f só faz sentido porque $\vec{F}$ é independente do caminho. Se $\vec{F}$ não fosse independente do caminho, então seria possível encontrar outro caminho C' de (a, b) para (x, y) tal que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq \int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, e nesse caso f não seria uma função.)

Queremos mostrar que f tem a propriedade $\nabla f = \vec{F}$. De fato, como o domínio D é aberto, existe uma bola aberta com centro em (x, y) inteiramente contida em D . Seja (x_1, y) nessa bola com $x_1 < x$. Seja C um caminho de (a, b) para (x, y) que consiste em duas partes: C_1 e C_2 . O primeiro trecho C_1 é qualquer caminho de (a, b) para (x_1, y) contido em D ; já C_2 é o segmento de reta horizontal de (x_1, y) a (x, y) (Figura 3). Então

$$f(x, y) = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

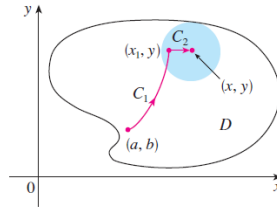


Figura 3:

Note que a $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não depende de x . Assim,

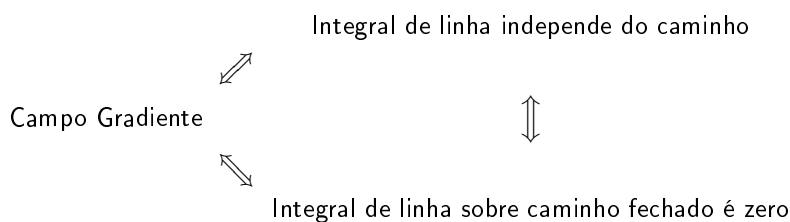
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Parametrizando C_2 por $r(t) = (t, y)$, $x_1 \leq t \leq x$, então

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^x \vec{F}(r(t)) \cdot r'(t) dt \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^x \vec{F}(r(t)) \cdot (1, 0) dt \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^x P(t, y) dt \\ &= P(x, y).\end{aligned}$$

Um argumento semelhante usando um segmento de linha vertical em vez de um segmento de linha horizontal mostra que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$. Portanto $\nabla f = \vec{F}$ e $\vec{F}$ é conservativo. A demonstração do teorema está completa.

Resumo: demonstramos que um campo vetorial num conjunto aberto conexo por caminho é conservativo se e somente se satisfaz qualquer uma das seguintes condições:



Uma questão permanece: como é possível saber se um campo vetorial $\vec{F}$ é conservativo ou não? Suponha que saibamos que $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ é conservativo, onde P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Então existe uma função f tal que $\vec{F} = \nabla f$, ou seja,

$$P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{e} \quad Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Portanto, pelo Teorema de Clairaut,

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

Assim, demonstramos o seguinte teorema:

Teorema 4. Se $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ é um campo vetorial conservativo, onde P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D , então

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

para todo $(x, y) \in D$.

Exemplo 3. Determine se o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (x - y)\vec{i} + (x - 2)\vec{j}$ é ou não conservativo.

Resolução. Sejam $P(x, y) = x - y$ e $Q(x, y) = x - 2$. Então

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 1$$

Como $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, pelo teorema anterior, $\vec{F}(x, y) = (x - y)\vec{i} + (x - 2)\vec{j}$ não é conservativo.

A recíproca do teorema anteriores só é verdadeira para um tipo especial de região. Para explicarmos isso, precisamos do conceito de **curva simples**, que é uma curva que não se autointercepta em nenhum ponto entre as extremidades. (Veja a Figura 4.)

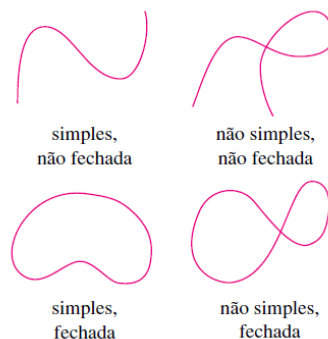


Figura 4: Tipos de curvas

Uma **região simplesmente conexa** no plano é uma região conexa por caminhos D tal que toda curva simples fechada em D contorna somente pontos de D . Observe a partir da Figura 5 que, intuitivamente falando, uma região simplesmente conexa não contém nenhum buraco e não podem consistir em duas regiões separadas.

Para regiões simplesmente conexas podemos agora enunciar a recíproca do Teorema 4, que fornece um processo conveniente para verificar se um campo vetorial

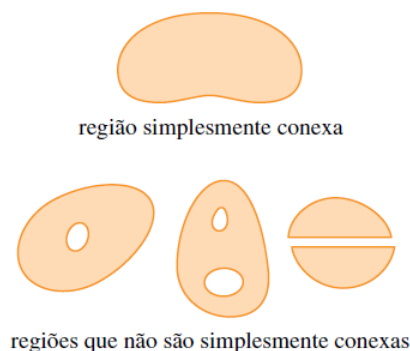


Figura 5:

em $\mathbb{R}^2$ é conservativo ou não. A demonstração é consequência do Teorema de Green a ser estudado na Aula 19.

Teorema 5. Seja $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ um campo vetorial em uma região aberta e simplesmente conexa $D \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que P e Q tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

para todo $(x, y) \in D$. Então $\vec{F}$ é conservativo.

Exemplo 4. Determine se o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (3 + 2xy)\vec{i} + (x^2 - 3y^2)\vec{j}$ é ou não conservativo.

Resolução. Sejam $P(x, y) = 3 + 2xy$ e $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$. Então

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

Além disso, como o domínio de $\vec{F}$ é o plano inteiro ($D = \mathbb{R}^2$), que é aberto e simplesmente conexo. Portanto, pelo Teorema 5, $\vec{F}(x, y) = (3 + 2xy)\vec{i} + (x^2 - 3y^2)\vec{j}$ é conservativo.

No Exemplo 4, o Teorema 5 diz que $\vec{F}$ é conservativo, mas não mostra como encontrar a função (potencial) f tal que $\nabla f = \vec{F}$. A demonstração do Teorema 3 nos dá uma pista de como encontrar f . Usamos “integração parcial”, como no exemplo a seguir.

Exemplo 5.

- (a) Se $\vec{F}(x, y) = (3 + 2xy)\vec{i} + (x^2 - 3y^2)\vec{j}$, determine uma função f tal que $\nabla f = \vec{F}$.
- (b) calcule a integral de linha $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é a curva dada por $r(t) = e^t \sin t \vec{i} + e^t \cos t \vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.

Resolução.

(a) Do Exemplo 4, sabemos que $\vec{F}$ é conservativo. Assim, existe uma função f satisfazendo $\nabla f = \vec{F}$, ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3 + 2xy \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - 3y^2 \quad (3)$$

Integrando (2) com relação a x , obtemos

$$f(x, y) = 3x + x^2y + g(y) \quad (4)$$

onde $g(y)$ é uma função de y a ser determinada. (Note que a constante de integração é uma constante em relação a x , ou seja, uma função de y que denotamos por $g(y)$.) Derivando ambos os lados de (4) com relação a y , vemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + g'(y) \quad (5)$$

Comparando (5) com (3), concluímos que

$$g'(y) = -3y^2$$

Integrando com relação a y , obtemos

$$g(y) = -y^3 + K$$

onde K é uma constante. Substituindo em (4), obtemos

$$f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + K$$

como a função potencial desejada.

(b) Para aplicar o Teorema 1 (Teorema Fundamental para Integrais de Linha), devemos conhecer os pontos inicial e final da curva C , ou seja,

$$r(0) = (0, 1) \quad \text{e} \quad r(\pi) = (0, -e^\pi).$$

Note que para aplicar o Teorema Fundamental para Integrais de Linha, podemos usar qualquer valor da constante K na expressão de $f(x, y)$. Assim, vamos considerar $K = 0$. Portanto,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(r(\pi)) - f(r(0)) = f(0, -e^\pi) - f(0, 1) = e^{3\pi} + 1.$$

O teorema a seguir resume os resultados vistos nesta aula e dá uma caracterização dos campos vetoriais no plano que são conservativos.

Teorema 6. Seja $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ um campo vetorial com funções coordenadas P e Q tendo derivadas parciais de primeira ordem contínuas numa região aberta e simplesmente conexa $D \subset \mathbb{R}^2$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, qualquer que seja a curva fechada suave por trechos C contida em D .
2. A integral de linha de $\vec{F}$ independe do caminho.
3. $\vec{F}$ é conservativo.
4. $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$ para todo $(x, y) \in D$.

Observação. A hipótese de que o domínio do campo vetorial é simplesmente conexo é essencial nos Teoremas 5 e 6. Para ver isso, consideremos o seguinte campo de vetorial definido em $\mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ por

$$\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{j}$$

Este campo vetorial satisfaz a condição

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

pois

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-(x^2 + y^2) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Como $\vec{F}$ satisfaz essa propriedade, podemos ser tentados a concluir que $\vec{F}$ é conservativo. No entanto, $\vec{F}$ não é conservativo. Para ver isso, considere a curva fechada C parametrizada por $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Pela definição de integral de linha,

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Assim, C é uma curva suave fechada, mas $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi \neq 0$. Portanto, $\vec{F}$ não é conservativo.