

## Cônicas

Até agora estudamos lugares geométricos de pontos no espaço.  $\mathbb{E}^3$  cujas coordenadas, em relação a um sistema de coordenadas, satisfazem equações de primeiro grau (exemplo, equação de um plano, equações da reta na forma planar). Vamos estudar agora lugares geométricos de pontos cujas coordenadas satisfazem uma equação de grau dois. Começamos com lugares geométricos em um plano (cônicas) e em seguida no espaço (quádricas).

Seja  $\Pi$  um plano em  $\mathbb{E}^3$ , e sejam  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  dois vetores diretores de  $\Pi$  com  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$  e  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ .

Seja  $O$  um ponto do plano  $\Pi$ .

Um ponto  $P$  do espaço pertence ao plano  $\Pi$  se, e somente se, existem escalares  $x, y$  tal que

$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Chamamos  $\Sigma = (O, B)$  de

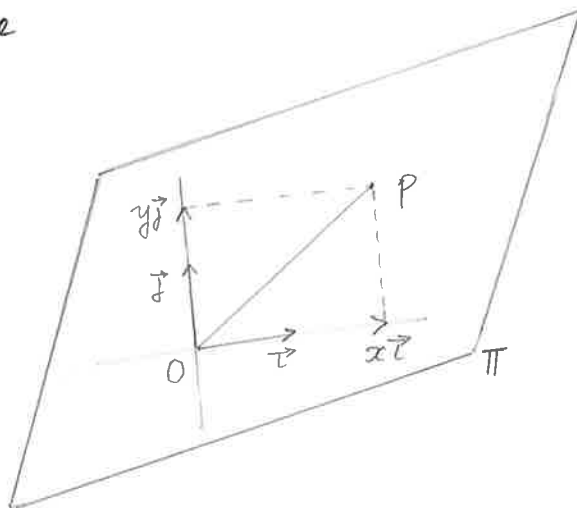
Sistema de coordenadas

em  $\Pi$  de origem  $O$  e base  $B$ .

As coordenadas de um ponto

$P$  em  $\Pi$  são as coordenadas

do vetor  $\vec{OP}$  na base  $B$ , ou seja  $P = (x, y)_{\Sigma}$ .



Observe que a base  $B$  não precisa ser ortonormal, mas

Sabemos que é bom escolher uma base ortonormal para poder calcular o produto escalar, norma de vetores, distância entre pontos etc.

Observe também que podemos escolher  $(O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} \wedge \vec{j}))$  como um sistema de coordenadas em  $\mathbb{E}^3$ , e em relação a este sistema,  $\Pi$  tem uma equação geral  $z = 0$  e seus pontos tem coordenadas da forma  $(x, y, 0)$ .

## Elipse, hipérbole, parábola

Seja  $\Pi$  um plano em  $\mathbb{E}^3$ .

### ① Elipse

Sejam  $F_1$  e  $F_2$  dois pontos distintos do plano  $\Pi$ ,  $2c$  sua distância e  $a$  um número real tal que  $a > c$ .

O lugar geométrico dos pontos  $X$  do plano  $\Pi$  tais que

$$d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$$

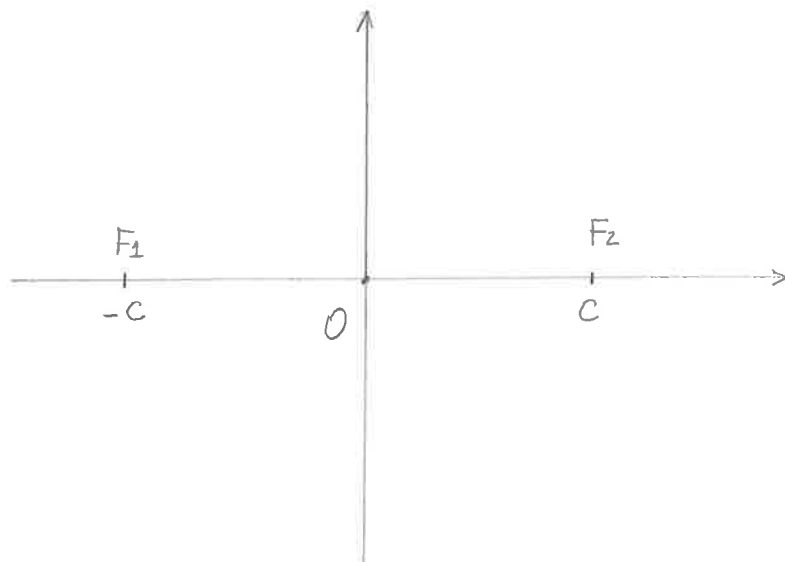
chama-se elipse.

Cada um dos pontos  $F_1$  e  $F_2$  é chamado foco da elipse, o segmento  $F_1F_2$  é chamado segmento focal, seu ponto médio, centro da elipse, e  $2c$ , distância focal.

A reta  $F_1F_2$  chama-se reta focal.

[Mostrar o desenho feito no Maple. ver arquivo no Tidia]

Seja  $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$  um sistema ortogonal de coordenadas em  $\Pi$  tal que  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$



Temos, em relação ao sistema  $\Sigma$ ,

$$\begin{aligned} X=(x,y) \in \text{Elipse} &\Leftrightarrow d(X,F_1)+d(X,F_2)=2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \end{aligned}$$

Precisamos tomar cuidado aqui:  $A=B \Rightarrow A^2=B^2$ , mas  $A^2=B^2 \Rightarrow A=B$  ou  $A=-B$ , então  $A=B$  não é equivalente a  $A^2=B^2$ .

Logo

$$\begin{aligned} X=(x,y) \in \text{Elipse} &\Rightarrow (x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2 \\ &\Rightarrow \cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + y^2 = 4a^2 + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\ &\Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx \\ &\Rightarrow a^2((x-c)^2+y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\ &\Rightarrow a^2(\cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + y^2) = a^4 - 2a^2\cancel{cx} + c^2x^2 \\ &\Rightarrow (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \end{aligned}$$

Como  $a > c$ , segue que  $a^2 - c^2 > 0$ . Então existe um número real positivo  $b$  tal que  $a^2 - c^2 = b^2$ .

Logo

$$X=(x,y) \in \text{Elipse} \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo por  $a^2b^2$ , obtemos

$$X=(x,y) \in \text{Elipse} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vamos mostrar que a recíproca vale, ou seja, se

$$X=(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow X \in \text{Elipse}.$$

Temos  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$  (\*)

Precisamos mostrar que  $d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$ .

Temos

$$\begin{aligned} (d(X, F_1))^2 &= (x+c)^2 + y^2 \\ &= x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \\ &= x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad (\text{usando } *) \\ &= \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 + 2cx + c^2 + b^2 \\ &= \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2 \quad (\text{usando } a^2 - c^2 = b^2) \\ &= \left(\frac{c}{a}x + a\right)^2 \end{aligned}$$

Podemos mostrar, da mesma maneira, que

$$(d(X, F_2))^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2.$$

Portanto  $d(X, F_1) = \left|\frac{c}{a}x + a\right|$  e  $d(X, F_2) = \left|\frac{c}{a}x - a\right|$ .

Como  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , segue que  $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ , o que implica que  $\left|\frac{x}{a}\right| \leq 1$ .

Como  $a > 0$  então  $\frac{|x|}{a} \leq 1$ .

Agora  $c > 0$ , então  $c \frac{|x|}{a} \leq c < a$ . Logo  $\frac{c}{a}|x| < a \Rightarrow -a < \frac{c}{a}x < a$

Portanto  $\frac{c}{a}x + a > 0$  e  $\frac{c}{a}x - a < 0$ .

$$\begin{cases} d(X, F_1) = \frac{c}{a}x + a \\ d(X, F_2) = -\frac{c}{a}x + a \end{cases} \Rightarrow d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a.$$

Acabamos de mostrar que

$$\boxed{X = (x, y) \in \text{Elipse} \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \begin{matrix} a^2 + b^2 = c^2, a > b > 0 \\ a > c > 0 \end{matrix}}$$

A equação acima chama-se equação reduzida da elipse.

Um resultado que segue das contas anteriores é o seguinte.

### Proposição

Um ponto  $X = (x, y)$  é um ponto da elipse de equação reduzida  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  se, e somente se, as distâncias aos focos  $F_1$  e  $F_2$  são

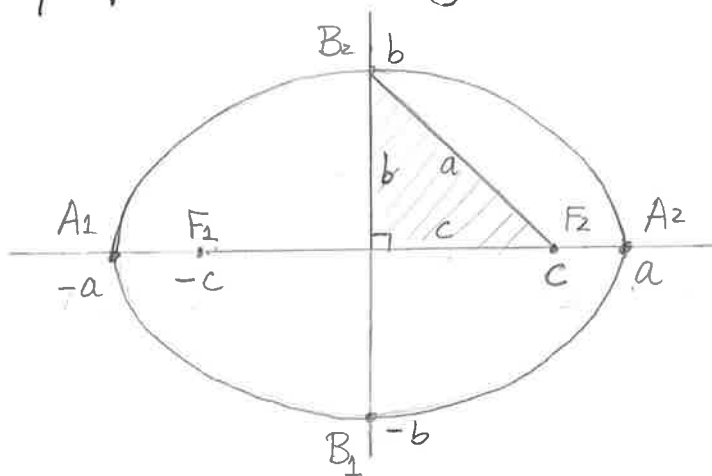
$$d(X, F_1) = a + \frac{c}{a}x \quad \text{e} \quad d(X, F_2) = a - \frac{c}{a}x. \quad \square$$

Observe que os pontos

$A_1 = (a, 0)$ ,  $A_2 = (-a, 0)$ ,  $B_1 = (0, b)$ ,  $B_2 = (0, b)$  pertencem a elipse de equação reduzida  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Estes pontos são os vértices da elipse.

As cordas  $A_1A_2$  e  $B_1B_2$  são, respectivamente, o eixo maior e o eixo menor da elipse.

A amplitude focal é o comprimento de uma corda que contém um foco e é perpendicular ao segmento focal.



Ver arquivo "Caustica-ellipse.pdf" no Tidia para alguns aspectos da geometria da elipse.

[Mostrar desenhos feitos no Maple.]

### Observação

Podemos escolher um sistema ortogonal de coordenadas com  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$ . Note caso haverá uma inversão de papéis entre  $x$  e  $y$  e chegaremos a seguinte equação reduzida da elipse  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ .

### Proposição

Uma equação da forma

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1$$

descreve uma elipse em relação a um sistema ortogonal de coordenadas  $\Sigma$  se, e somente se, os números  $p$  e  $q$  são positivos e distintos.

### Exemplos

1. Seja  $4x^2 + 169y^2 = 676$  uma equação de uma elipse (em relação a um sistema ortogonal de coordenadas).

Calcule a distância focal, a medida do eixo maior e a medida do eixo menor da elipse.

2. Prove que os focos e o centro da elipse não pertencem a elipse.

3. Prove que se  $PQ$  é uma corda qualquer da elipse, então

$$d(P, Q) \leq 2a.$$