

SMA0355 - Aula 17 - 19.05.2022

Campos Vetoriais e Integral de Linha de Campos Vetoriais

Objetivos de aprendizado

1. Reconhecer um campo vetorial no plano ou no espaço.
2. Esboce um campo vetorial a partir de uma dada equação.
3. Definir a integral de linha de um campo vetorial ao longo de uma curva.
4. Calcular uma integral de linha vetorial ao longo de uma curva.
5. Use uma integral de linha para calcular o trabalho realizado ao mover um objeto ao longo de uma curva.

Campos vetoriais são uma ferramenta importante para descrever muitos conceitos físicos, como gravitação e eletromagnetismo, que afetam o comportamento de objetos em uma região do plano ou do espaço. Eles também são úteis para lidar com o comportamento em grande escala, como tempestades atmosféricas ou correntes oceânicas de profundidade. Nesta aula, examinamos as definições básicas e os desenhos de campos vetoriais e calcularemos a integral de linha de campos vetoriais.

Definição.

Um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ é uma função que a cada ponto (x, y) de um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ associa vetor bidimensional $\vec{F}(x, y)$.

Um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ é uma função que a cada ponto (x, y, z) de um conjunto $D \subset \mathbb{R}^3$ associa vetor tridimensional $\vec{F}(x, y, z)$.

Um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ pode ser representado de duas maneiras equivalentes. A primeira maneira é usar um vetor com componentes que são funções de duas variáveis:

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

A segunda maneira é usar os vetores unitários padrão:

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}.$$

As funções escalares P e Q são as componentes do campo vetorial $\vec{F}$. Um campo vetorial é dito contínuo se suas funções componentes são contínuas.

Similarmente, podemos representar campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$ com funções componentes da forma

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

ou

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

A melhor maneira de visualizar um campo vetorial é desenhar as setas representando os vetores $\vec{F}(x, y)$ começando no ponto (x, y) .

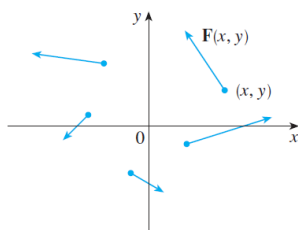


Figura 1:

A figura a seguir ilustra de modo análogo um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$.

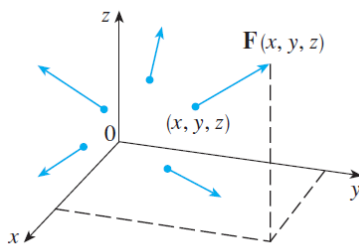


Figura 2:

Exemplo 1. Um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ é definido por $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$. Descreva $\vec{F}$ desenhando alguns de seus vetores $\vec{F}(x, y)$.

Resolução. Uma vez que $\vec{F}(1, 0) = \vec{j}$, desenhamos o vetor $\vec{j}$ começando no ponto $(1, 0)$ na Figura 3. Uma vez que $\vec{F}(0, 1) = -\vec{i}$, desenhamos o vetor $-\vec{i}$ com ponto inicial $(0, 1)$. Continuando desta maneira desenhando um número significativo de vetores para representar o campo vetorial na Figura 3.

Note que o produto escalar

$$\vec{F}(x, y) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j}) = (-y\vec{i} + x\vec{j}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j}) = -xy + xy = 0$$

para qualquer ponto (x, y) . Isto mostra que $\vec{F}(x, y)$ é ortogonal ao vetor posição $x\vec{i} + y\vec{j}$. Portanto, cada vetor $\vec{F}(x, y)$ é tangente ao círculo com centro na origem

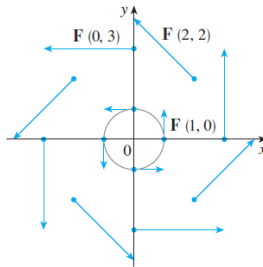


Figura 3: $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$

em que está localizado. Além disso,

$$\|\vec{F}(x, y)\| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$$

e o comprimento do vetor $\vec{F}(x, y)$ é igual ao raio do círculo.

Exemplo 2. Esboce o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ dado por $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{k}$.

Resolução. Pela definição de $\vec{F}$, todos vetores são verticais. Para os pontos (x, y, z) com $z > 0$, o vetor $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{k}$ tem sentido do vetor $\vec{k}$ e para pontos (x, y, z) com $z < 0$, o vetor $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{k}$ tem oposto sentido do vetor $\vec{k}$. Note que o comprimento de $\vec{F}(x, y, z)$ aumenta a medida que o ponto (x, y, z) se distancia do plano xy .

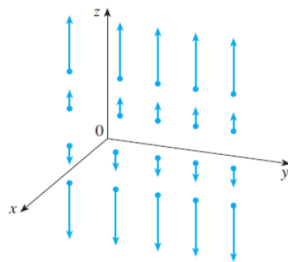


Figura 4: $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{k}$

Exemplo 3. Os vetores da Figura 5 representam os vetores velocidade do ar por um aerofólio. Seja $\vec{V}(x, y, z)$ o vetor velocidade do ar no ponto (x, y, z) . Então $\vec{V}$ associa a cada ponto (x, y, z) um vetor velocidade. Por isso, o campo vetorial $\vec{V}$ é chamado campo de velocidades.

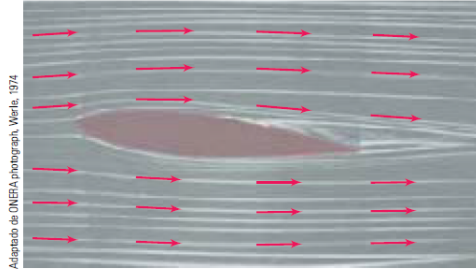


Figura 5: Escoamento do ar por um aerofólio inclinado

Exemplo 4. A Lei da Gravitação de Newton afirma que a intensidade da força gravitacional entre dois objetos com massas m e M , $M > m$, é

$$\|\vec{F}\| = \frac{mMG}{r^2}$$

onde r é a distância entre os objetos e G é a constante gravitacional. Vamos supor que o objeto com massa M esteja localizado na origem em $\mathbb{R}^3$ e o objeto de massa m esteja localizado no ponto (x, y, z) . Denotando $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ o vetor posição do objeto de massa m , então $r = \|\vec{r}\|$, logo $r^2 = \|\vec{r}\|^2$. A força gravitacional exercida nesse segundo objeto age em direção à origem e o vetor unitário em sua direção é

$$-\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$$

Portanto, a força gravitacional agindo no objeto em (x, y, z) é

$$\vec{F}(x, y, z) = -\frac{mMG}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r}. \quad (1)$$

Em termos de suas componentes, esta fórmula escreve-se como

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

O campo gravitacional $\vec{F}$ está ilustrado na Figura 6.

Exemplo 5. Suponha que uma carga elétrica Q esteja localizada na origem. Pela Lei de Coulomb, a força elétrica $\vec{F}(x, y, z)$ exercida por essa carga sobre uma carga q localizada no ponto (x, y, z) com vetor posição $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ é

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{\varepsilon qQ}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r} \quad (2)$$

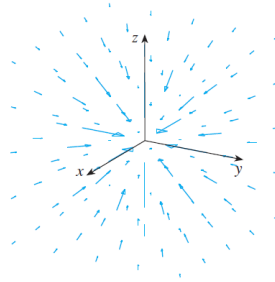


Figura 6: Campo de força gravitacional

onde ε é uma constante. Para cargas de mesmo sinal, temos $qQ > 0$ e a força é repulsiva; para cargas opostas temos $qQ < 0$ e a força é atrativa. Observe a semelhança entre as fórmulas (1) e (2). Ambas são exemplos de campos de força. Em vez de considerarem a força elétrica $\vec{F}$, os físicos frequentemente consideram a força por unidade de carga:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{q} \vec{F}(x, y, z) = \frac{\varepsilon Q}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}$$

Então $\vec{E}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ chamado campo elétrico de Q .

Exemplo 6. Campo Gradiente

Se $f(x, y)$ é uma função escalar que possui derivadas parciais de primeira ordem, então seu gradiente

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \vec{j}$$

define um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ e é denominado campo vetorial gradiente. Da mesma forma, se $f(x, y, z)$ for uma função escalar de três variáveis, seu gradiente é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \vec{k}$$

Exemplo 7. Considere a função $f(x, y) = x^2y - y^3$. O campo vetorial gradiente de f é

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \vec{j} = 2xy \vec{i} + (x^2 - 3y^2) \vec{j}$$

A Figura 7 mostra as curvas de nível de f com o campo vetorial gradiente. Observe que os vetores gradientes são perpendiculares às curvas de nível. Observe também que os vetores gradientes são mais longos onde as curvas de nível estão mais próximas umas das outras e mais curtos quando elas estão mais distantes entre si. Isso se

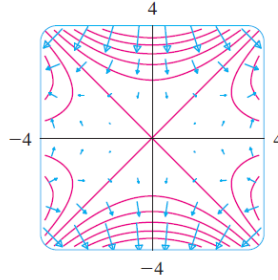


Figura 7:

deve ao fato de o comprimento do vetor gradiente ser o valor da derivada direcional de f e a proximidade das curvas de nível indicar uma grande inclinação no gráfico.

Definição. Um campo vetorial $\vec{F}$ é chamado campo vetorial conservativo se ele for o campo gradiente de alguma função escalar, ou seja, se existir uma função escalar f tal que $\vec{F} = \nabla f$. Nessa situação, a função f é denominada uma função potencial de $\vec{F}$.

Exemplo 8. O campo gravitacional $\vec{F}$ é um campo vetorial conservativo, pois, se definirmos

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

então

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\vec{k} \\ &= \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\vec{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\vec{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\vec{k} \\ &= \vec{F}(x, y, z). \end{aligned}$$

Integrais de Linha de Campos Vetoriais

Motivação. Suponha que $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ seja um campo de força contínuo em $\mathbb{R}^3$. Queremos calcular o trabalho exercido por essa força para mover uma partícula ao longo de uma curva suave C .

Para fazer isso, dividimos C em n subarcos $P_{i-1}P_i$ com comprimentos ΔS_i através da partição do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de igual comprimento. (Veja Figura 8.) Escolha um ponto $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ no i -ésimo subarco correspondente ao valor do parâmetro t_i^* . Se ΔS_i é pequeno, o movimento da partícula de P_{i-1} para P_i na curva ocorre aproximadamente na direção de $\vec{T}(t_i^*) \equiv \vec{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$, o vetor

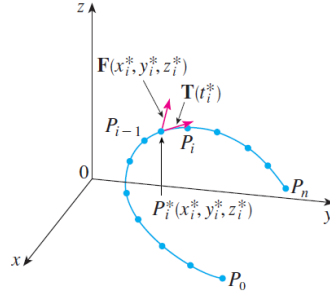


Figura 8:

tangente unitário a curva em P_i^* . Então, o trabalho feito pela força $\vec{F}$ para mover a partícula de P_{i-1} para P_i é aproximadamente

$$\vec{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta S_i \vec{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] = [\vec{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \vec{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \Delta S_i$$

e o trabalho total executado para mover a partícula ao longo de C é aproximadamente

$$\sum_{i=1}^n [\vec{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \vec{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \Delta S_i$$

Assim, o trabalho W realizado pela campo de força $\vec{F}$ para deslocar uma partícula ao longo de C é

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [\vec{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \vec{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \Delta S_i$$

ou seja,

$$W = \int_C \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{T}(x, y, z) ds = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

Esta equação diz que o trabalho é a integral de linha da componente tangencial da força sobre C , ou seja, a integral de linha sobre C da função escalar $\vec{F} \cdot \vec{T}$.

Se a curva C é dada pela parametrização $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, então

$$\vec{T}(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$$

e pela definição da integral de linha sobre C de uma função escalar, podemos escrever a equação do trabalho como

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_a^b \left[\vec{F}(r(t)) \cdot \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \right] \|r'(t)\| dt = \int_a^b \vec{F}(r(t)) \cdot r'(t) dt$$

Esta última integral é frequentemente abreviada como $\int_C \vec{F} \cdot dr$.

Definição. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva suave C dada pela função vetorial $r(t)$, $a \leq t \leq b$. Definimos a **integral de linha de $\vec{F}$ ao longo de C** por

$$\int_C \vec{F} \cdot dr = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_a^b \vec{F}(r(t)) \cdot r'(t) dt$$

Exemplo 9. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot dr$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ e C é a curva parametrizada por $r(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Resolução. Uma vez que

$$\begin{aligned}\vec{F}(r(t)) &= (\cos t, \sin t, t) \\ r'(t) &= (\cos t, -\sin t, 1)\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot dr &= \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t, t) \cdot (\cos t, -\sin t, 1) dt \\ &= \int_0^{2\pi} [\sin t \cos t - \sin t \cos t + t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} t dt = 2\pi^2.\end{aligned}$$

Exemplo 10. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot dr$, onde $\vec{F}(x, y) = (x, y)$ e C é a curva parametrizada por $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

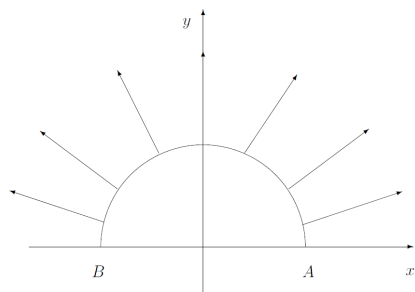


Figura 9:

Resolução. Uma vez que

$$\begin{aligned}\vec{F}(r(t)) &= (\cos t, \sin t) \\ r'(t) &= (-\sin t, \cos t)\end{aligned}$$