

Mudança de Sistema de Coordenadas

A nossa escolha de um sistema de coordenadas é arbitrária.

Como passar das coordenadas de um ponto X em $\mathbb{E}^3$ em um sistema de coordenadas para um outro sistema de coordenadas?

Seja $\Sigma_1 = (O_1, E)$ um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$ e seja

$\Sigma_2 = (O_2, F)$ um novo sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$.

Suponha que $O_2 = (h, k, l)_{\Sigma_1}$ e denote por M_{EF} a matriz de mudança da base E para F .

Um ponto $X \in \mathbb{E}^3$ tem coordenadas $X = (x, y, z)_{\Sigma_1}$ e coordenadas

$$X = (u, v, w)_{\Sigma_2}.$$

Por definição,

$$X = (x, y, z)_{\Sigma_1} \iff \vec{O_1 X} = (x, y, z)_E$$

$$X = (u, v, w)_{\Sigma_2} \iff \vec{O_2 X} = (u, v, w)_F$$

$$O_2 = (h, k, l)_{\Sigma_1} \iff \vec{O_1 O_2} = (h, k, l)_E$$

Decorre

$$\vec{O_2 X} = \vec{O_2 O_1} + \vec{O_1 X} = \vec{O_1 X} - \vec{O_1 O_2} = (x - h, y - k, z - l)_E$$

Aplicando a fórmula de mudança de base a $\vec{O_2 X}$ obtemos

$$\begin{pmatrix} x-h \\ y-k \\ z-l \end{pmatrix}_E = M_{EF} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_F$$

$$\text{Portanto, } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} + M_{EF} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Escrevendo

$$M_{EF} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

obtemos as chamadas equações de mudança de coordenadas de Σ_1 para Σ_2 :

$$\begin{cases} x = h + a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w \\ y = k + a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w \\ z = l + a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w \end{cases}$$

Observação

Temos $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_F = M_{EF}^{-1} \begin{pmatrix} x-h \\ y-k \\ z-l \end{pmatrix}_E = M_{FE} \begin{pmatrix} x-h \\ y-k \\ z-l \end{pmatrix}$ e isso nos permite obter

as equações de mudança de coordenadas de Σ_2 para Σ_1 .

Exemplo

Sejam $\Sigma_1 = (O_1, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ e $\Sigma_2 = (O_2, (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3))$ dois sistemas de coordenadas com $O_2 = (1, 0, 0)_{\Sigma_1}$, $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_2$

Obtenha, em relação a Σ_2 ,

- uma equação vetorial da reta $r: [X = (0, 0, 0) + \lambda(0, 1, -1)]_{\Sigma_1}$,
- uma equação geral do plano $\pi: [2x - y + z = 0]_{\Sigma_1}$,

Solução

Temos $M_{EF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, portanto as equações de mudança de coordenadas de Σ_1 para Σ_2 são

$$\begin{cases} x = 1 + u \\ y = w \\ z = -v \end{cases} \quad \text{no sistema } \Sigma_1$$

(a) As equações paramétricas da reta r são $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

Equivalentemente $r: \begin{cases} 1 + u = 0 \\ w = \lambda \\ -v = -\lambda \end{cases}$

Ou seja as equações paramétricas da reta r no sistema Σ_2 são

$$r: \begin{cases} u = -1 \\ v = \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ w = \lambda \end{cases}$$

Uma equação vetorial de r no sistema Σ_2 é

$$r: [X = (-1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1)]_{\Sigma_2}$$

(b) Substituindo x, y, z pelas suas expressões em termo de u, v, w , obtemos

$$2(1+u) - (w) + (-v) = 0 \Leftrightarrow 2u - v - w + 2 = 0$$

$$\text{Então } \Pi: [2u - v - w + 2 = 0]_{\Sigma_2}.$$

Translação

Se as bases dos sistemas $\Sigma_1 = (O_1, E)$ e $\Sigma_2 = (O_2, E)$ são iguais, diremos que Σ_2 é obtido pela translação de Σ_1 para o ponto O_2 .

Como $M_{EE} = I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, as equações de mudança de coordenadas de Σ_1 para Σ_2 ficam

$$\begin{cases} x = h + u \\ y = k + v \\ z = l + w \end{cases}$$

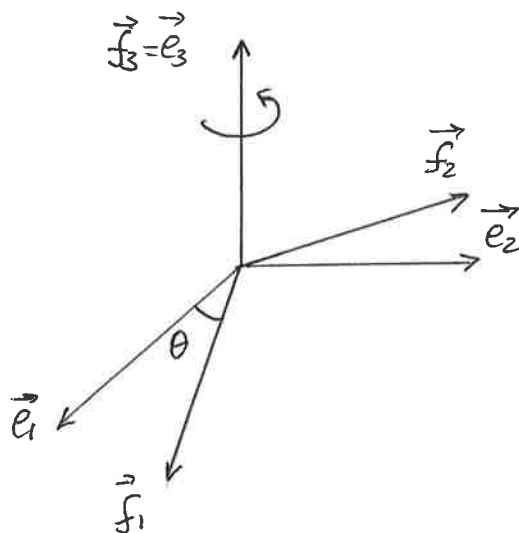
onde $O_2 = (h, k, l)_{\Sigma_1}$.

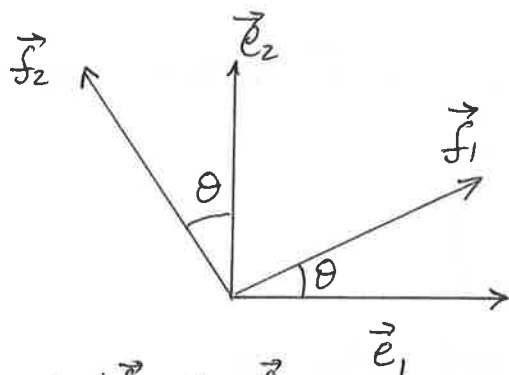
Rotação

Vamos tratar do caso onde as bases são ortonormais.

Suponha que $\Sigma_1 = (O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ e $\Sigma_2 = (O, (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3))$ são dois sistemas de coordenadas com a mesma origem O .

Vamos fixar $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$ e supor que $\vec{f}_2$ e $\vec{f}_1$ são obtidos "girando" a base E em torno de Oz no sentido anti-horário por um ângulo θ .





Temos $\vec{f}_1 = \text{proj}_{\vec{e}_1} \vec{f}_1 + \text{proj}_{\vec{e}_2} \vec{f}_1$

$$= \frac{\vec{f}_1 \cdot \vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|^2} \vec{e}_1 + \frac{\vec{f}_1 \cdot \vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|^2} \vec{e}_2$$

$$= (\vec{f}_1 \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{f}_1 \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2$$

$$= \cos \theta \vec{e}_1 + \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \vec{e}_2$$

$$= \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2$$

Similarmente,

$$\vec{f}_2 = (\vec{f}_2 \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{f}_2 \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 = \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2 = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2$$

Portanto

$$M_{EF} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e as equações de mudança de coordenadas são

$$\begin{cases} x = u \cos \theta - v \sin \theta \\ y = u \sin \theta + v \cos \theta \\ z = w \end{cases}$$

Observações

1. Mantendo $\vec{e}_1$ fixo: $M_{EF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

e mantendo $\vec{e}_2$ fixo

$$M_{EF} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

2. No plano, as equações de mudança de coordenadas por translação são $\begin{cases} x = h + u \\ y = k + v \end{cases}$ e por rotação $\begin{cases} x = u \cos \theta - v \sin \theta \\ y = u \sin \theta + v \cos \theta \end{cases}$