

SMA0355 - Aula 16 - 17.05.2022
Integrais de Linha de uma Função Escalar

Objetivos de aprendizado

1. Definir a integral de linha de uma função escalar ao longo de uma curva.
2. Calcular uma integral de linha de uma função escalar ao longo de uma curva.
3. Calcular massa e os momentos de um fio fino ao longo de uma curva.

Para calcular a massa total de um fio fino ao longo de uma curva no plano ou no espaço, ou para calcular o trabalho realizado por uma força variável agindo ao longo dessa curva, precisamos de uma noção mais geral de integral do que a definição dada no Cálculo 1. Precisamos integrar sobre uma curva C , e não sobre um intervalo $[a, b]$. Essas integrais mais gerais são chamadas *integrais de linha*.

Começamos com uma curva plana C dada pelas equações paramétricas

$$x = x(t) \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b$$

ou equivalentemente pela equação vetorial

$$r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad a \leq t \leq b.$$

Admitimos que C seja uma curva suave. Isto significa que C parametrizada por uma função vetorial $r(t)$ num intervalo $[a, b]$ e r' é contínua e $r'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$, ou seja, uma curva suave não tem quebras abruptas ou cúspides, quando seu vetor tangente gira, ele o faz continuamente.

Se dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de igual comprimento e se fizermos

$$x_i = x(t_i) \quad y_i = y(t_i)$$

então os pontos correspondentes $P_i(x_i, y_i)$ divide C em n subarcs de comprimento $\Delta S_1, \dots, \Delta S_n$. Escolhemos um ponto qualquer $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ no i -ésimo subarco (isto corresponde um ponto t_i^* em $[t_{i-1}, t_i]$).

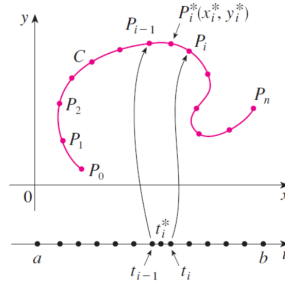


Figura 1:

Agora, se $f(x, y)$ for uma função escalar de duas variáveis cujo domínio inclui a curva C , podemos formar a soma

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta S_i$$

que é semelhante a uma soma de Riemann. Em seguida tomamos o limite dessa soma quando n tende ao infinito e fazemos a seguinte definição:

Definição. Se $f(x, y)$ é uma função escalar definida em uma curva plana suave C , então a integral de linha de f sobre C é

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta S_i \quad (1)$$

se este limite existir.

Se a curva C for suave e a função $f(x, y)$ for contínua em C , então é possível mostrar que o limite em (1) existe. Podemos aplicar o teorema fundamental do cálculo para derivar a equação do comprimento de arco

$$s(t) = \int_a^t \|r'(\tau)\| d\tau,$$

para expressar a equação (1) como

$$ds = \|r'(t)\| dt$$

e calcular a integral de $f(x, y)$ sobre C por

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(r(t)) \|r'(t)\| dt = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Assim, para calcular a integral de linha de uma função escalar $f(x, y)$ sobre uma curva C :

1. Encontre uma parametrização suave de C

$$r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad a \leq t \leq b.$$

2. Calcule a integral de linha como

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Observação. Se $f(x, y) = 1$ para todo $(x, y) \in C$, então

$$\int_C f(x, y) ds = \int_C 1 ds = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = L,$$

onde L é o comprimento da curva C .

Exemplo 1. Calcule $\int_C (x - 3y^2) ds$, onde C é o segmento de reta unindo a origem $(0, 0)$ ao ponto $(1, 1)$.

Resolução. Escolhemos a parametrização mais simples que podemos imaginar:

$$r(t) = t\vec{i} + t\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Assim,

$$r'(t) = 1\vec{i} + 1\vec{j} \quad \text{and} \quad \|r'(t)\| = \sqrt{2} \neq 0 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Portanto C é uma curva suave e

$$\int_C (x - 3y^2) ds = \int_0^1 (t - 3t^2) \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \left(\frac{t^2}{2} - t^3 \right) \Big|_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exemplo 2. Calcule $\int_C (2 + x^2 y) ds$, onde C é o arco superior da circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Resolução. Essa curva pode ser parametrizada por

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Assim,

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t, \quad \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 1 \neq 0 \quad \forall t.$$

Portanto C é uma curva suave e

$$\int_C (2 + x^2 y) ds = \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) dt = \left(2t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_0^\pi = 2\pi + \frac{2}{3}.$$

Uma curva C é chamada suave por trechos se C for uma união de um número finito de curvas suaves $C_1, C_2, \dots, C_n$, onde o ponto inicial de C_{i+1} é o ponto terminal de C_i . Então, vale a propriedade de aditividade da integral de linha:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds + \dots + \int_{C_n} f(x, y) ds.$$

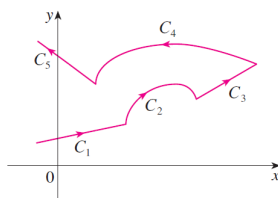


Figura 2:

Exemplo 3. Calcule $\int_C 2x ds$, onde C é formada pelo arco C_1 de parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$, seguido pelo segmento de reta C_2 de $(1, 1)$ a $(1, 2)$.

Resolução.

$$C_1 : x = t, \quad y = t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2 : x = 1, \quad y = t, \quad 1 \leq t \leq 2$$

$$\int_{C_1} 2x ds = \int_0^1 2t \sqrt{1 + (2t)^2} dt = \frac{1}{6} (1 + 4t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}$$

$$\int_{C_2} 2x ds = \int_1^2 2\sqrt{1} dt = 2t \Big|_1^2 = 2$$

Portanto,

$$\int_C 2x ds = \int_{C_1} 2x ds + \int_{C_2} 2x ds = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2.$$

Interpretação geométrica da integral de linha de uma curva plana. Quando $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in C$, sendo C uma curva no plano xy , a fórmula

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(r(t)) \|r'(t)\| dt = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

tem como interpretação geométrica a área da superfície cilíndrica que tem como base a curva C e altura $f(x, y)$ em cada ponto $(x, y) \in C$.

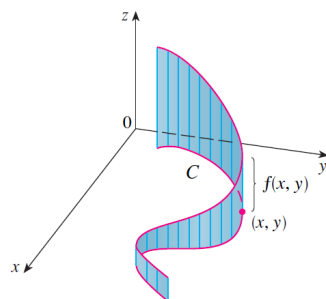


Figura 3:

Integrais de linha no espaço

Seja C uma curva suave no espaço dada pelas equações paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a \leq t \leq b,$$

ou pela equação vetorial

$$r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad a \leq t \leq b.$$

Se $f(x, y, z)$ for uma função escalar definida e contínua em uma região contendo a curva C , então definimos a *integral de linha* de f sobre C como

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) ds &= \int_a^b f(r(t)) \|r'(t)\| dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt. \end{aligned}$$

Exemplo 4. Calcule $\int_C (x^2 + y^2 + z) ds$, onde C é parte da hélice parametrizada por $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Resolução. Note que

$$f(r(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t + t = 1 + t$$

e

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{2}.$$

Portanto,

$$\int_C (x^2 + y^2 + z) ds = \int_0^{2\pi} (1 + t) \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \left(t + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}(\pi + \pi^2).$$

Exemplo 5. (Independência da parametrização) Calcule $\int_C (x^2 + y^2 + z) ds$, onde C é parte da hélice parametrizada por $r(t) = (\cos(2t), \sin(2t), 2t)$, $0 \leq t \leq \pi$. Observe que esta função e curva são as mesmas do exemplo anterior; a única diferença é que a curva foi reparametrizada para que o tempo corra duas vezes mais rápido.

Resolução. Note que

$$f(r(t)) = \cos^2(2t) + \sin^2(2t) + 2t = 1 + 2t$$

e

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{(-2\sin(2t))^2 + (2\cos(2t))^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

Portanto,

$$\int_C (x^2 + y^2 + z) ds = 2\sqrt{2} \int_0^\pi (1 + 2t) dt = 2\sqrt{2} (t + t^2) \Big|_0^\pi = 2\sqrt{2}(\pi + \pi^2).$$

Observe que isso está de acordo com a resposta do exemplo anterior. Alterar a parametrização não alterou o valor da integral de linha. Integrais de linha escalares são independentes da parametrização, desde que a curva seja percorrida exatamente uma vez pela parametrização.

Aplicação

Suponha que $\rho(x, y, z)$ represente a densidade linear num ponto (x, y, z) de um fio fino com o formato de uma curva C no espaço parametrizada por

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a \leq t \leq b.$$

A massa M do fio é

$$M = \int_C \rho(x, y, z) ds = \int_a^b \rho(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

Os momentos de C em m relação aos planos coordenados são:

$$M_{yz} = \int_C x\rho(x, y, z) ds, \quad M_{xz} = \int_C y\rho(x, y, z) ds, \quad M_{xy} = \int_C z\rho(x, y, z) ds.$$

As coordenadas do centro de massa de C são:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}.$$

Os momentos de inércia em relação aos eixos coordenados são:

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$$

$$I_y = \int_C (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds.$$