

## Submersões Riemannianas

Uma aplicação diferenciável  $\pi : M \rightarrow N$ , entre duas variedades diferenciáveis, é chamada uma *submersão* se a diferencial  $d\pi(p)$  é sobrejetora, para todo  $p \in M$ . Neste caso,  $\mathcal{V}_p = \ker d\pi(p)$  define uma distribuição diferenciável em  $M$ , chamada de *distribuição vertical*. Note que  $\mathcal{V}$  pode ser identificada com os espaços tangentes às fibras de  $\pi$ .

Em geral, não existe uma escolha canônica para uma distribuição complementar a  $\mathcal{V}$  em  $TM$ , mas este é o caso quando  $M$  é uma variedade Riemanniana. Neste caso, podemos construir um complemento  $\mathcal{H}$  definindo  $\mathcal{H}_p$  como sendo o complemento ortogonal de  $\mathcal{V}_p$  em  $T_pM$ . Então,  $\mathcal{H}$  é uma distribuição diferenciável chamada a *distribuição horizontal*. Observe que  $d\pi(p)$  induz um isomorfismo linear entre  $\mathcal{H}_p$  e  $T_{\pi(p)}N$ , para todo  $p \in M$ .

**Definição 1.** Uma *submersão Riemanniana*  $\pi : M \rightarrow N$ , entre duas variedades Riemannianas, é uma submersão de modo que a diferencial  $d\pi(p)$  induz uma isometria entre  $\mathcal{H}_p$  e  $T_{\pi(p)}N$ , qualquer que seja  $p \in M$ .

Todo recobrimento Riemanniano é naturalmente uma submersão Riemanniana pois, sendo uma isometria local, preserva o comprimento dos vetores horizontais.

**Exemplo 2.** Se  $M_1$  e  $M_2$  são variedades Riemannianas, as projeções naturais  $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$  são exemplos de submersões Riemannianas.

Assim como na Proposição ??, podemos obter submersões Riemannianas através de espaços quocientes.

**Proposição 3.** Dado uma variedade Riemanniana  $\tilde{M}$ , considere um subgrupo  $G \subset \text{Iso}(\tilde{M})$  agindo de forma livre e propriamente descontínua. Então, existe uma única métrica Riemanniana em  $M = \tilde{M}/G$  que torna a projeção  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  uma submersão Riemanniana.

*Demonstração.* Como na Proposição ??, basta provar a existência da métrica. Dados  $p \in M$  e  $v, w \in T_pM$ , definimos

$$\langle v, w \rangle_p = \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle_{\tilde{p}}, \quad (3.1)$$

onde  $\tilde{p}$  é qualquer ponto da fibra  $\pi^{-1}(p)$  e  $\tilde{v}, \tilde{w}$  são os únicos vetores horizontais em  $\mathcal{H}_{\tilde{p}}$  satisfazendo

$$d\pi(\tilde{p}) \cdot \tilde{v} = v \quad \text{e} \quad d\pi(\tilde{p}) \cdot \tilde{w} = w.$$

Devemos provar, inicialmente, que a expressão (3.1) independe da escolha do ponto  $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ . De fato, se  $\tilde{q}$  é outro ponto em  $\pi^{-1}(p)$ , sejam  $\tilde{u}, \tilde{z} \in T_{\tilde{q}}\tilde{M}$  tais que

$$d\pi(\tilde{q}) \cdot \tilde{u} = v \quad \text{e} \quad d\pi(\tilde{q}) \cdot \tilde{z} = w.$$

Por outro lado, existe um elemento  $g \in G$  tal que  $\tilde{q} = g(\tilde{p})$  e  $df(\tilde{p}) : \mathcal{H}_{\tilde{p}} \rightarrow \mathcal{H}_{\tilde{q}}$  é uma isometria satisfazendo

$$dg(\tilde{p}) \cdot \tilde{v} = \tilde{u} \quad \text{e} \quad dg(\tilde{p}) \cdot \tilde{w} = \tilde{z}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_p &= \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle_{\tilde{p}} = \langle dg(\tilde{p})^{-1} \cdot \tilde{u}, dg(\tilde{p})^{-1} \cdot \tilde{z} \rangle_{\tilde{p}} \\ &= \langle \tilde{u}, \tilde{z} \rangle_{\tilde{q}}. \end{aligned}$$

Resta mostrar a diferenciabilidade da métrica em (3.1). Para isso, considere a projeção ortogonal  $P_{\tilde{p}} : T_{\tilde{p}}\tilde{M} \rightarrow \mathcal{H}_{\tilde{p}}$ . Sabemos que, por  $\pi$  ser uma submersão,  $\pi$  é uma aplicação aberta e todo ponto de  $\tilde{M}$  pertence à imagem de uma seção local  $s : U \rightarrow \tilde{M}$  de  $\tilde{M}$ , onde  $U$  é um aberto em  $M$  ( $\pi \circ s = id|_U$ ). Reescrevemos (3.1) como

$$\langle v, w \rangle_p = \langle P_{s(p)}(ds(p) \cdot v), P_{s(p)}(ds(p) \cdot w) \rangle_{s(p)},$$

onde  $p \in U$ , mostrando que  $\langle, \rangle$  é localmente diferenciável. Finalmente, a exigência que  $\pi$  é uma submersão Riemanniana força a métrica  $\langle, \rangle$  ser dada pela fórmula (3.1), e isso prova a unicidade da métrica.  $\square$

**Exemplo 4** (Espaço projetivo complexo  $\mathbb{C}P^n$ ). Como conjunto,  $\mathbb{C}P^n$  é constituído de todas as retas complexas que passam pela origem em  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Assim, como no caso de  $\mathbb{R}P^n$ , podemos identificar  $\mathbb{C}P^n$  como o quociente  $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ . Mais precisamente, considerando a esfera unitária

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$$

em  $\mathbb{C}^{n+1}$ , o grupo  $\mathbb{S}^1$  age em  $\mathbb{S}^{2n+1}$  pela multiplicação coordenada a coordenada:

$$\lambda \cdot (z_0, \dots, z_n) = (\lambda \cdot z_0, \dots, \lambda \cdot z_n).$$

Esta ação é livre. De fato, sejam  $\lambda \in \mathbb{S}^1$  e  $z \in \mathbb{S}^{2n+1}$ , com  $z = (z_0, \dots, z_n)$ , e suponha  $\lambda \cdot z = z$ . Isso implica que  $\lambda \cdot z_i = z_i$ , para todo  $0 \leq i \leq n$ . Como  $z \in \mathbb{S}^{2n+1}$ , existe pelo menos uma coordenada  $z_j \neq 0$  e, para esta coordenada, a igualdade  $\lambda z_j = z_j$  implica  $\lambda = 1$ , provando a afirmação. Além

disso, como  $\mathbb{S}^1$  é compacto e  $\mathbb{S}^{2n+1}$  é Hausdorff, essa ação é também propriamente descontínua. Portanto, o espaço quociente  $\mathbb{C}P^n = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$  admite uma estrutura de variedade diferenciável compacta de dimensão  $2n$ , tornando a  $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  uma submersão. Finalmente, essa ação é também por isometrias. De fato, dado  $z \in \mathbb{S}^1$ , basta mostrar que a multiplicação  $L_z : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$  é uma isometria. A esfera  $\mathbb{S}^{2n+1}$  tem a métrica Riemanniana induzida de  $\mathbb{R}^{2n+2}$ , que é a parte real do produto interno Hermitiano  $(\cdot, \cdot)$  de  $\mathbb{C}^{n+1}$ , e

$$\begin{aligned} (L_z(x), L_z(y)) &= (z \cdot x, z \cdot y) = \sum_{i=0}^n z \cdot x_i \cdot \overline{z \cdot y_i} \\ &= \sum_{i=0}^n z \cdot \overline{z} \cdot x_i \cdot \overline{y_i} = \|z\|^2 (x, y) = (x, y), \end{aligned}$$

para quaisquer  $x, y \in \mathbb{C}^{n+1}$ . Portanto, existe uma métrica Riemanniana em  $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$  que torna a projeção  $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  uma submersão Riemanniana. Essa métrica quociente é usualmente chamada de *métrica de Fubini-Study* em  $\mathbb{C}P^n$ .

No contexto da teoria de fibrados, a projeção  $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  é um fibrado principal com fibra  $\mathbb{S}^1$ . Esta é a famosa *fibração de Hopf*; para  $n = 1$ , temos  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Além disso, essa projeção nos fornece um exemplo de submersão Riemanniana que não é um recobrimento Riemanniano: em um recobrimento, a fibra  $\pi^{-1}(p)$  é um conjunto discreto de pontos, enquanto que na fibração de Hopf a fibra sobre cada ponto de  $\mathbb{C}P^n$  é um círculo  $\mathbb{S}^1$ .

Seja  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  uma submersão Riemanniana. Uma curva diferenciável  $\gamma : I \rightarrow \tilde{M}$  é chamada *horizontal* se  $\gamma'(t) \in \mathcal{H}_{\gamma(t)}$ , para todo  $t \in I$ , onde  $\mathcal{H}$  denota a distribuição horizontal associada em  $\tilde{M}$ .

**Teorema 5.** *Dado uma submersão Riemanniana  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ , valem as seguintes propriedades:*

(a)  *$\pi$  é não-crescente em relação à distância, ou seja,*

$$d(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{y})) \leq d(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

*para quaisquer  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{M}$ .*

(b) *Seja  $\gamma : I \rightarrow M$  uma geodésica em  $M$ . Dado  $\tilde{p} \in \pi^{-1}(\gamma(t_0))$ , existe um único levantamento  $\tilde{\gamma}$  de  $\gamma$ , localmente horizontal, com  $\tilde{\gamma}(t_0) = \tilde{p}$ , tal que  $\tilde{\gamma}$  é geodésica em  $\tilde{M}$ .*

(c) Seja  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \tilde{M}$  uma geodésica em  $\tilde{M}$ . Se  $\tilde{\gamma}'(t_0)$  é um vetor horizontal, então  $\tilde{\gamma}'(t)$  é horizontal para todo  $t \in I$ , e a curva  $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$  é uma geodésica em  $M$ , com o mesmo comprimento de  $\tilde{\gamma}$ .

(d) Se  $\tilde{M}$  é completa, o mesmo vale para  $M$ .

*Demonstração.* (a) Dados  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{M}$ , seja  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$  uma curva diferenciável por partes ligando  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$ . Assim,  $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$  é uma curva diferenciável por partes ligando  $\pi(\tilde{x})$  e  $\pi(\tilde{y})$ . Além disso, tem-se  $l(\gamma) \leq l(\tilde{\gamma})$ , pois a projeção  $d\pi : T\tilde{M} \rightarrow TM$  anula as componentes verticais dos vetores e preserva as horizontais. Disso decorre que  $d(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{y})) \leq d(\tilde{x}, \tilde{y})$ .

(b) Seja  $\gamma$  uma geodésica em  $M$ . Sendo  $\gamma$  uma imersão ( $\gamma$  é não-constante), existe  $\epsilon > 0$  tal que  $N = \gamma(-\epsilon, \epsilon)$  é uma subvariedade mergulhada de dimensão 1 de  $M$ . Como  $\pi$  é submersão,  $\tilde{N} = \pi^{-1}(N)$  é uma subvariedade de dimensão 1 mergulhada de  $\tilde{M}$ . Além disso, existe uma função diferenciável  $\phi : \tilde{N} \rightarrow (-\epsilon, \epsilon)$  tal que

$$\pi(\tilde{x}) = \gamma(\phi(\tilde{x})),$$

para todo  $\tilde{x} \in \tilde{N}$ . Tome, por exemplo,  $\phi = \gamma^{-1} \circ \pi|_{\tilde{N}}$ . Usando  $\phi$ , podemos definir um campo vetorial horizontal em  $\tilde{N}$  pondo

$$\tilde{X}(\tilde{x}) = (d\pi(\tilde{x})|_{\mathcal{H}_{\tilde{x}}})^{-1} \cdot \gamma'(\phi(\tilde{x})), \quad (5.1)$$

para todo  $\tilde{x} \in \tilde{N}$ . Dado  $\tilde{p} \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ , seja  $\tilde{\gamma}$  a curva integral de  $\tilde{X}$ , com  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ . Então  $\tilde{\gamma}$  é uma curva horizontal definida numa vizinhança de 0 e, em virtude de (5.1), tem-se  $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ . Afirmamos que  $\tilde{\gamma}$  é geodésica em  $\tilde{M}$ . De fato, em virtude do Teorema ?? e do item (a), segue que para todo  $t_0$  no domínio de  $\gamma$ , existe um número  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} l(\tilde{\gamma}|_{[t_0, t_0+h]}) &= l(\gamma|_{[t_0, t_0+h]}) = d(\gamma(t_0), \gamma(t_0+h)) \\ &\leq d(\tilde{\gamma}(t_0), \tilde{\gamma}(t_0+h)), \end{aligned}$$

para todo  $0 < h < \delta$ , e existe uma fórmula similar para o caso  $-\delta < h < 0$ . Disso decorre que  $\tilde{\gamma}$  é localmente minimizante. Como  $\|\tilde{\gamma}'(t)\| = \|\gamma'(t)\|$  é constante, segue que  $\tilde{\gamma}$  já está parametrizada proporcional ao comprimento de arco e, assim, é geodésica.

(c) Dado uma geodésica  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \tilde{M}$  de  $\tilde{M}$ , seja  $\tilde{p} = \tilde{\gamma}(0)$ . Seja  $\gamma$  a geodésica em  $M$  com condições iniciais

$$\gamma(0) = \pi(\tilde{p}) \quad \text{e} \quad \gamma'(0) = d\pi(\tilde{p}) \cdot \tilde{\gamma}'(0).$$

Pelo item (b), existe um levantamento  $\tilde{\eta}$  de  $\gamma$ , localmente horizontal, com  $\tilde{\eta}(0) = \tilde{p}$ , que também é geodésica em  $\tilde{M}$ . Como  $\tilde{\gamma}'(0)$  e  $\tilde{\eta}'(0)$  são ambos vetores horizontais, segue que  $\tilde{\gamma}$  e  $\tilde{\eta}$  coincidem na interseção dos seus intervalos abertos de definição. Este intervalo é também o conjunto dos pontos no domínio de  $\tilde{\gamma}$  onde ela é um levantamento horizontal de  $\gamma$ . Agora, sendo  $\tilde{\gamma}$  levantamento horizontal de  $\gamma$ , o conjunto dos instantes onde  $\tilde{\gamma}$  é levantamento horizontal de  $\gamma$  é também fechado em seu domínio, logo  $\tilde{\gamma}$  é levantamento horizontal de  $\gamma$  em todo seu domínio. Finalmente, o fato que  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  têm o mesmo comprimento segue de que  $d\pi(\tilde{x}) : \mathcal{H}_{\tilde{x}} \rightarrow T_{\pi(\tilde{x})}M$  é isometria linear, para todo  $\tilde{x} \in \tilde{M}$ .

(d) Seja  $\gamma$  uma geodésica em  $M$ . Pelo item (b),  $\gamma$  admite um levantamento horizontal  $\tilde{\gamma}$  que, devido a completude de  $\tilde{M}$ , está definido em todo  $\mathbb{R}$ . Pelo item (c), segue que  $\pi \circ \tilde{\gamma}$  é geodésica em  $M$  definida em todo  $\mathbb{R}$  que, claramente, estende a geodésica  $\gamma$ , mostrando a completude de  $M$ .  $\square$