

SMA0355 - Aula 9 - 28.04.2022
Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Objetivos de aprendizado

1. Determinar a imagem de uma região sob uma dada transformação de variáveis.
2. Calcular o Jacobiano de uma dada transformação.
3. Avaliar uma integral dupla usando uma mudança de variáveis.
4. Avalie uma integral tripla usando uma mudança de variáveis.

Na integração de funções de uma variável, usamos o método de substituição para simplificar o cálculo de uma integral. Este método é baseado na fórmula

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(u))g'(u) du,$$

onde $x = g(u)$, $a = g(c)$, $b = g(d)$, sendo g invertível com derivada contínua em $[c, d]$ e f contínua em $[a, b]$. Outro modo de escrever essa fórmula é o seguinte

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(x(u)) \frac{dx}{du} du.$$

Uma mudança de variáveis pode também ser útil em integrais duplas. Já vimos um exemplo disso: a mudança para coordenadas polares. As novas variáveis r e θ estão relacionadas às velhas variáveis x e y pelas equações

$$x = g(r, \theta) = r \cos \theta, \quad y = h(r, \theta) = r \sin \theta$$

e a fórmula de mudança de variáveis que vimos na Aula 4 pode ser escrita como

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

onde S é a região no plano $r\theta$ que corresponde à região R no plano xy .

De modo geral, consideraremos uma mudança de variáveis dada pela **transformação** T do plano uv no plano xy :

$$T(u, v) = (x, y)$$

onde x e y estão relacionados com u e v pelas equações

$$x = g(u, v) \quad \text{e} \quad y = h(u, v),$$

ou, como às vezes escrevemos,

$$x = x(u, v) \quad \text{e} \quad y = y(u, v), \tag{1}$$

Uma transformação $T : S \rightarrow R$ no plano nada mais é do que uma função cujo domínio R e imagem S são ambos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Uma transformação $T : S \rightarrow R$, definida como $T(u, v) = (x, y)$, é chamada **injetora** se não houver dois pontos em S com a mesma imagem em R . Se T é injetora, então existe uma transformação inversa T^{-1} do plano xy para o plano uv e é possível inverter as equações (2) em termos de x e y :

$$u = u(x, y) \quad \text{e} \quad v = v(x, y).$$

A Figura 1 mostra o efeito de uma transformação injetora T em uma região S do plano uv . T transforma S em uma região R no plano xy , denominada imagem de T , constituída das imagens de todos os pontos de S .

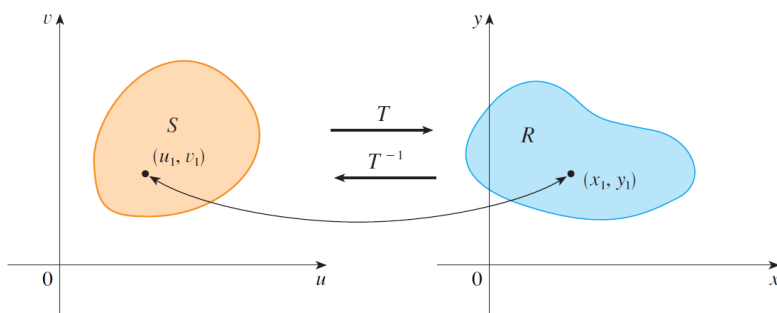


Figura 1:

Exemplo 1. Uma transformação T é definida pelas equações

$$x = u^2 - v^2 \quad \text{e} \quad y = 2uv$$

Determine a imagem do quadrado $S = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$ pela transformação T .

Resolução. A transformação leva a fronteira de S na fronteira da imagem. Assim, começamos por determinar a imagem das arestas de S .

A primeira aresta, S_1 , é dada por $v = 0$ e $0 \leq u \leq 1$. (Veja a Figura 2.) Das equações dadas, temos

$$x = u^2 \quad \text{e} \quad y = 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad y = 0.$$

Então, S_1 é levada no segmento de reta que liga $(0, 0)$ a $(1, 0)$ no plano xy .

A segunda aresta, S_2 , é $u = 1$ e $0 \leq v \leq 1$ e, colocando nas equações dadas, temos

$$x = 1 - v^2 \quad \text{e} \quad y = 2v.$$

Eliminando v , obtemos

$$x = 1 - \frac{y^2}{4}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

que é um arco de uma parábola. Da mesma forma, S_3 é dada por $v = 1$ e $0 \leq u \leq 1$, cuja imagem é o arco parabólico

$$x = \frac{y^2}{4} - 1, \quad -1 \leq x \leq 0.$$

Finalmente, S_4 é dada por $u = 0$ e $0 \leq v \leq 1$, cuja imagem é $x = -v^2$, $y = 0$, ou seja,

$$-1 \leq x \leq 0 \text{ e } y = 0.$$

A imagem do quadrado S é a região R (mostrada na Figura 2) limitada pelo eixo x e pelas parábolas dadas $x = 1 - \frac{y^2}{4}$ e $x = \frac{y^2}{4} - 1$.

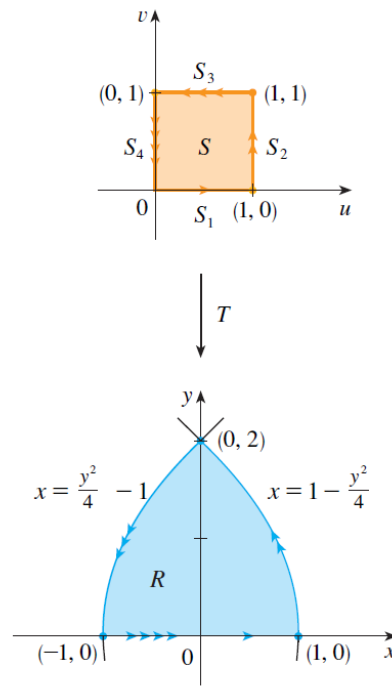


Figura 2:

Jacobianos

Seja $T(u, v) = (g(u, v), h(u, v))$ uma transformação, onde $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$ são de classe C^1 , ou seja, as derivadas parciais de primeira ordem g_u , g_v , h_u e h_v existem e também são contínuas. Queremos ver como T transforma uma pequena região retangular S , com dimensões Δu e Δv , no plano uv (veja a Figura 3).

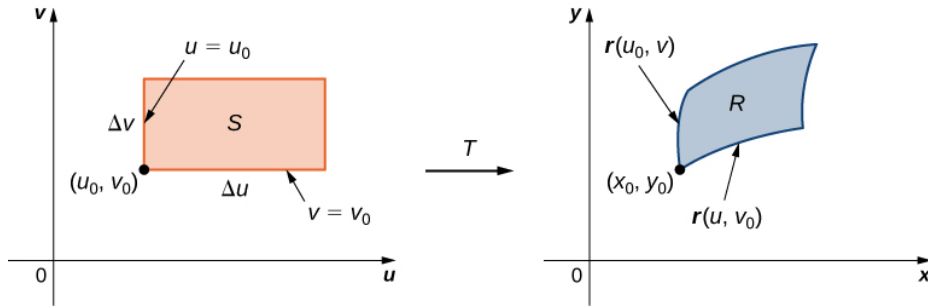


Figura 3:

Como $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$, temos o vetor posição $\vec{r}(u, v) = g(u, v)\vec{i} + h(u, v)\vec{j}$ da imagem do ponto (u, v) . Suponha que (u_0, v_0) seja a coordenada do ponto do vértice inferior esquerdo, cuja imagem é o ponto $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$. A reta $v = v_0$ tem como imagem a curva da imagem dada pela função vetorial $\vec{r}(u, v_0)$, e o vetor tangente em (x_0, y_0) para a curva da imagem é

$$\vec{r}_u = g_u(u_0, v_0)\vec{i} + h_u(u_0, v_0)\vec{j} = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j}$$

Da mesma forma, a imagem da reta $u = u_0$ é a curva da imagem com função vetorial $\vec{r}(u_0, v)$, e o vetor tangente em (x_0, y_0) para a curva da imagem é

$$\vec{r}_v = g_v(u_0, v_0)\vec{i} + h_v(u_0, v_0)\vec{j} = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j}$$

Podemos aproximar a região imagem $R = T(S)$ pelo paralelogramo determinado pelos vetores secantes

$$\vec{a} = \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \vec{r}(u_0, v_0) \quad \text{e} \quad \vec{b} = \vec{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0)$$

Agora, note que

$$\vec{r}_u = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \vec{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

Assim,

$$\vec{a} = \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \vec{r}(u_0, v_0) \approx \Delta u \vec{r}_u$$

Da mesma forma

$$\vec{b} = \vec{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0) \approx \Delta v \vec{r}_v$$

Sendo assim, podemos aproximar R por um paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta u \vec{r}_u$ e $\Delta v \vec{r}_v$ (Figura 4). Portanto, podemos aproximar a área ΔA da imagem R pela área desse paralelogramo, que é

$$\|\Delta u \vec{r}_u \times \Delta v \vec{r}_v\| = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \Delta u \Delta v$$

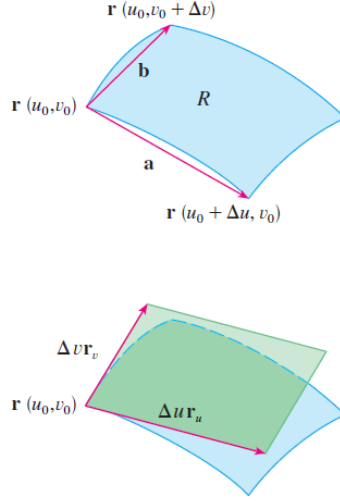


Figura 4:

Calculando o produto produto vetorial, temos

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \vec{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Como $\|\vec{k}\| = 1$, temos

$$\Delta A \approx \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \Delta u \Delta v = \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| \Delta u \Delta v,$$

onde as derivadas parciais são calculadas em (u_0, v_0) . O determinante que aparece nesse cálculo é chamado jacobiano da transformação e tem uma notação especial:

Definição. O jacobiano da transformação T dada por $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$ é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Agora vamos ver como a mudança de variáveis afeta a integral dupla. Em seguida, dividimos a região S do plano em retângulos S_{ij} e chamamos suas imagens no plano xy de R_{ij} . (Veja a Figura 5.)

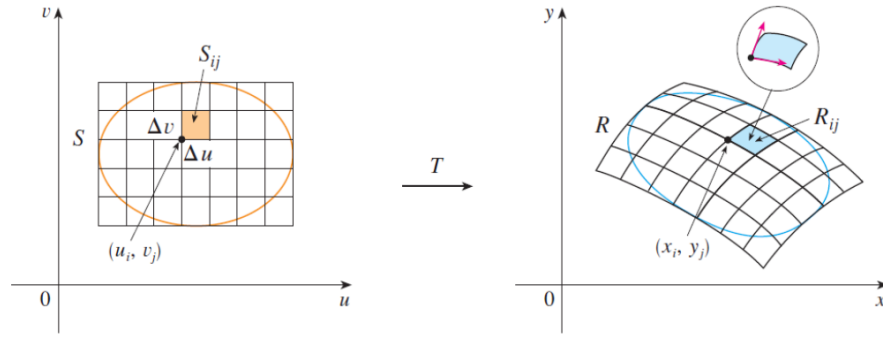


Figura 5:

Aplicando a aproximação a cada R_{ij} , aproximamos a integral dupla de uma função contínua f em R , como segue

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A \\ &\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(g(u_i, v_j), h(u_i, v_j)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v \end{aligned}$$

onde o jacobiano é calculado em (u_i, v_j) . Observe que a soma dupla é a soma de Riemann da função $f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$.

A argumentação acima sugere que o seguinte teorema seja verdadeiro.

Teorema da Mudança de Variáveis em Integrais Duplas. Seja $T : S \rightarrow R$ uma transformação de classe C^1 e injetora, cujo jacobiano seja não nulo em S . Se f é uma função integrável em $R = T(S)$, então

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Esse teorema diz que mudamos de uma integral em x e y para uma integral em u e v escrevendo x e y em termos de u e v e escrevendo

$$dA = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Observação. O teorema da mudança de variáveis ainda é válido se o jacobiano de T for nulo ou T deixa de ser injetora em subconjuntos de S que possam ser descritos por um finito de pontos ou por um conjunto suave ou por uma união finita destes dois tipos.

Exemplo 2. Utilize a mudança de variáveis

$$x = u^2 - v^2 \quad \text{e} \quad y = 2uv$$

para calcular a integral $\iint_R y dA$, onde R é a região limitada pelo eixo x e pelas parábolas $y^2 = 4 - 4x$, $y^2 = 4 + 4x$, $y \geq 0$.

Resolução. A região R está mostrada na Figura 2. No Exemplo 1, descobrimos que $T(S) = R$, onde S é o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. De fato, a razão que nos levou a fazer a mudança de variável para calcular a integral é que S é uma região muito mais simples que R . Vamos calcular o jacobiano:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0$$

para todo $(u, v) \in S$, exceto para $(u, v) = (0, 0)$. Portanto, pelo Teorema da Mudança de Variáveis,

$$\begin{aligned} \iint_R y dA &= \iint_S 2uv \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 2uv 4(u^2 + v^2) du dv \\ &= 8 \int_0^1 \int_0^1 (u^3 v + uv^3) du dv \\ &= 8 \int_0^1 \left(\frac{1}{4} u^4 v + \frac{1}{2} u^2 v^3 \right) \Big|_{u=0}^{u=1} dv \\ &= \int_0^1 (2v + 4v^3) dv \\ &= (v^2 + v^4) \Big|_0^1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Exemplo 3 (Mudança polar). Considere uma transformação T seja definida como $T(r, \theta) = (x, y)$ onde

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

A geometria dessa transformação é mostrada na Figura 6. T mapeia um retângulo S no plano $r\theta$ no retângulo polar R no plano xy .

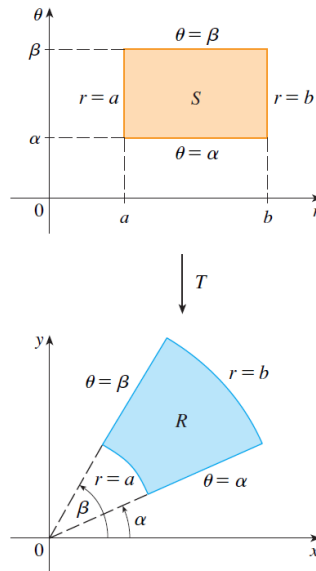


Figura 6:

O jacobiano de T é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \geq 0.$$

Logo, o teorema de mudança de variáveis nos leva a

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

que é o mesmo que havíamos estudado na Aula 5.

Exemplo 4. Calcule a integral $\iint_R (x-y) dA$, onde R é o paralelogramo de vértices $(1, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(6, 5)$.

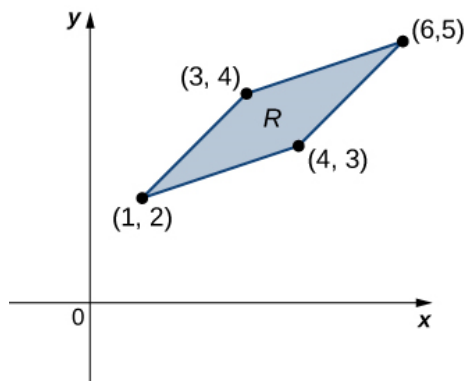


Figura 7:

Resolução. Primeiro, precisamos entender a região de integração R . Os lados do paralelogramo estão contidos nas retas

$$x - y + 1 = 0, \quad x - y - 1 = 0, \quad x - 3y + 5 = 0, \quad x - 3y + 9 = 0.$$

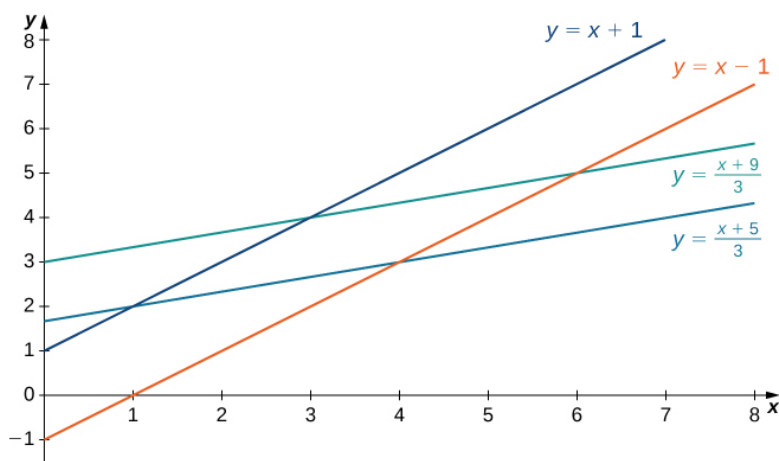


Figura 8:

Outro modo de escrever essas retas é

$$x - y = -1, \quad x - y = 1, \quad x - 3y = -5, \quad x - 3y = -9.$$

A presença dos termos $x - y$ e $x - 3y$ nas retas que limitam o paralelogramo R sugere a mudança de variáveis

$$u = x - y, \quad v = x - 3y.$$

Então os limites de integração são $-1 \leq u \leq 1$ e $-9 \leq v \leq -5$. Para resolver em x e y , multiplicamos a primeira equação por 3 e subtraímos a segunda equação para obter

$$3u - v = 2x \Rightarrow x = \frac{3u - v}{2}$$

Além disso, se simplesmente subtraímos a segunda equação da primeira, obtemos

$$u - v = 2y \Rightarrow y = \frac{u - v}{2}.$$

Portanto, podemos escolher a transformação

$$T(u, v) = \left(\frac{3u - v}{2}, \frac{u - v}{2} \right), \quad (u, v) \in [-1, 1] \times [-9, -5],$$

cujo jacobiano é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{2}.$$

Também, o integrando original torna-se

$$x - y = u.$$

Portanto, pelo teorema da mudança de variáveis

$$\iint_R (x - y) dA = \int_{-9}^{-5} \int_{-1}^1 u \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \int_{-9}^{-5} \int_{-1}^1 \frac{u}{2} du dv = \int_{-9}^{-5} dv \int_{-1}^1 \frac{u}{2} du = 0.$$

Mudança de variáveis na integral tripla

Como veremos a seguir, a fórmula de mudança de variáveis na integral dupla pode ser estendida às integrais triplas.

Seja $T : S \rightarrow R$ uma transformação que leva uma região S no espaço tridimensional uvw para uma região R no espaço tridimensional xyz por meio das equações

$$x = g(u, v, w), \quad y = h(u, v, w), \quad z = k(u, v, w)$$

onde g, h, k são funções com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em R .

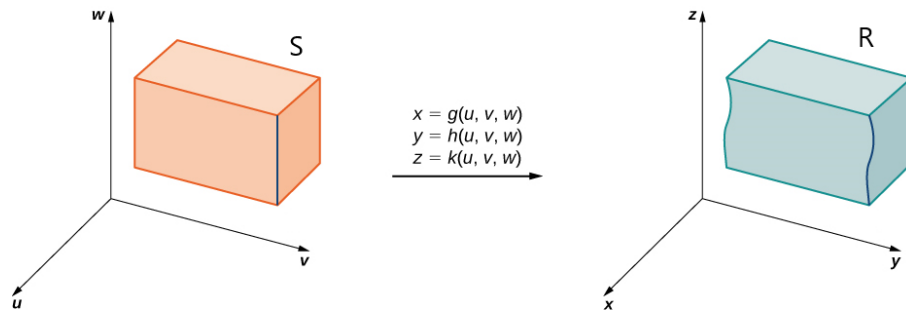


Figura 9:

O **jacobiano** de T é o seguinte determinante

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Teorema da Mudança de Variáveis em Integrais Triplas. Seja $T : S \rightarrow R$ uma transformação de classe C^1 e injetora, cujo jacobiano seja não nulo em S . Se f é uma função integrável em $R = T(S)$, então

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

Casos especiais de mudanças de variáveis

1. Mudança de variáveis cilíndricas

Neste caso, a transformação é $T(r, \theta, z) = (x, y, z)$ do espaço $r\theta z$ para o espaço xyz (Figura 10) dada por

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

O jacobiano dessa transformação é

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

Portanto, a fórmula da mudança de variáveis se escreve

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

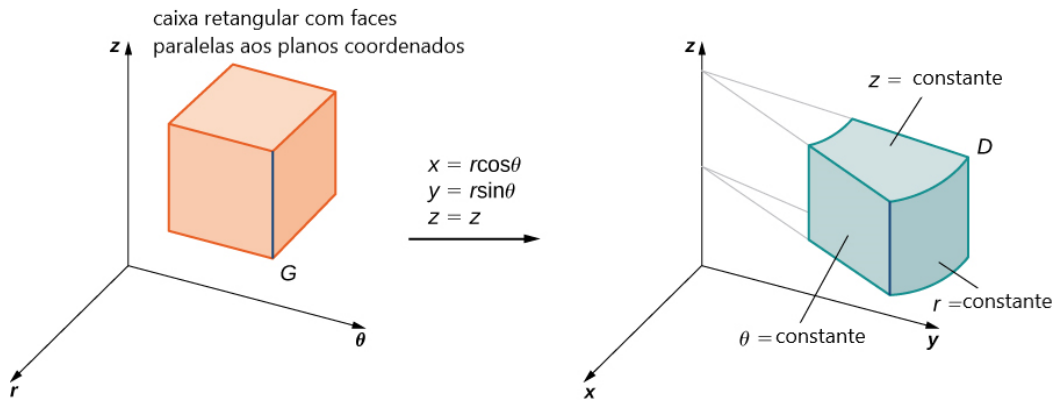


Figura 10: