

# Um passeio pela teoria de singularidades

Maria Aparecida Soares Ruas  
ICMC-USP

# Grupo de Singularidades do ICMC-USP

## Prof. Gilberto Francisco Loibel



## Grupo de singularidades do ICMC-USP

### Docentes do ICMC integrantes do grupo



Ana Claudia  
Nakano



Fandi Tan



Marcelo José  
Sika



Maria Aparecida  
Soares Ruas



Nilson Garcia  
Maxwell



Rivaldo de Góes  
GUILAS Junior



Raimundo Nonato  
dos Santos



Regilma Delacort dos  
Santos Oliveira



Roberta Geddi  
Wik Atique



Ton Marar



Victor Hugo  
Jorge Penz

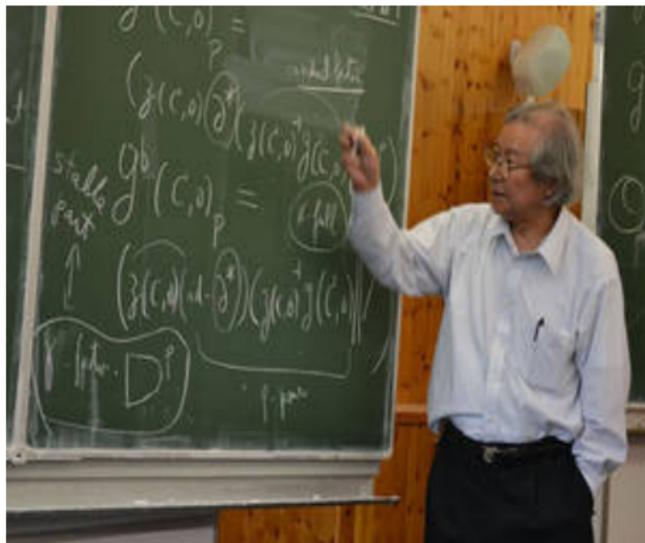


## Singularidade:

qualidade ou propriedade do que é singular, do que não é usual.



# Heisuke Hironaka, medalha Fields, 1970



*“Singularities are all over the place. Without singularities, you cannot talk about shapes. When you write a signature, if there is no crossing, no sharp point, it’s just a squiggle. It doesn’t make a signature. Many phenomena are interesting, or sometimes disastrous, because they have singularities. A singularity might be a crossing or something suddenly changing direction. There are many things like that in the world, and that’s why the world is interesting. Otherwise, it would be completely flat. If everything were smooth, then there would be no novels or movies. The world is interesting because of the singularities....”*

Heisuke Hironaka

Notices of the AMS, v. 52, no. 9.



# Pontos duplos, pontos de cúspide



Uma assinatura é uma curva plana com singularidades.



# A superfície singular do ICMC-USP

## SINGULARITIES

Singularities Laboratory - [sing.icmc.usp.br](http://sing.icmc.usp.br)

### Research lines

- » Topology and classification of singularities
- » Multiplicity, integral closure and equisingularity
- » Singularities in differential geometry and implicit equations
- » Applications of singularity theory to bifurcation problems
- » Singularities in dynamical systems

### Faculty

Ana Claudia Nabarro  
[anaclara@icmc.usp.br](mailto:anaclara@icmc.usp.br)

Farid Tari  
[farid@icmc.usp.br](mailto:farid@icmc.usp.br)

Marcelo José Sala  
[mjsala@icmc.usp.br](mailto:mjsala@icmc.usp.br)

Maria Aparecida Soares Ruas  
[maasruas@icmc.usp.br](mailto:maasruas@icmc.usp.br)

Miriam Garcia Manoel  
[miriam@icmc.usp.br](mailto:miriam@icmc.usp.br)

Nivaldo de Goes Gralha Junior  
[njunior@icmc.usp.br](mailto:njunior@icmc.usp.br)

Raimundo Norato Araújo dos Santos  
[rnorato@icmc.usp.br](mailto:rnorato@icmc.usp.br)

Reglene Delazarri dos Santos Oliveira  
[reglene@icmc.usp.br](mailto:reglene@icmc.usp.br)

Roberta Godel Wik Alique  
[rwik@icmc.usp.br](mailto:rwik@icmc.usp.br)

Washington Luiz Marar  
[ton@icmc.usp.br](mailto:ton@icmc.usp.br)

Victor Hugo Jorge Pérez  
[vhjgomez@icmc.usp.br](mailto:vhjgomez@icmc.usp.br)

RESEARCH CATALOG



Singularity theory has a wide range of applications to various areas of science and intersects with several lines of mathematics. It also contributes to the development of knot theory, optics, robotics and computer vision.

Superfície estudada por Ton Marar em sua tese de doutorado (U. Warwick, Inglaterra).



# Modelos matemáticos

Matemática



Ciências Exatas/Biológicas/  
Humanas



Modelos Matemáticos

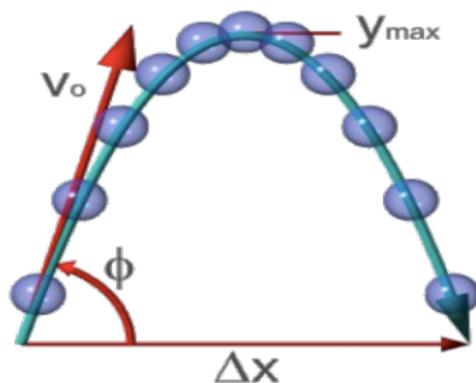


Teoria de Singularidades

# Exemplo: Lançamento de projétil

Tir\_parabòlic.png (imagem PNG, 300 × 300 pixels)

ht



# Evolução das formas

Percebemos coisas, objetos, entes, etc, aos quais damos **nomes**. São **formas ou estruturas** que possuem um certo grau de **ESTABILIDADE**; elas ocupam um certo lugar no espaço e existem por um período de tempo.

As formas evoluem e podem perder a estabilidade de diferentes formas.

A teoria de singularidades oferece métodos para prever as possíveis mudanças nas formas e para explicar essas mudanças.



$$f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_a(x) = x^3 + ax$$

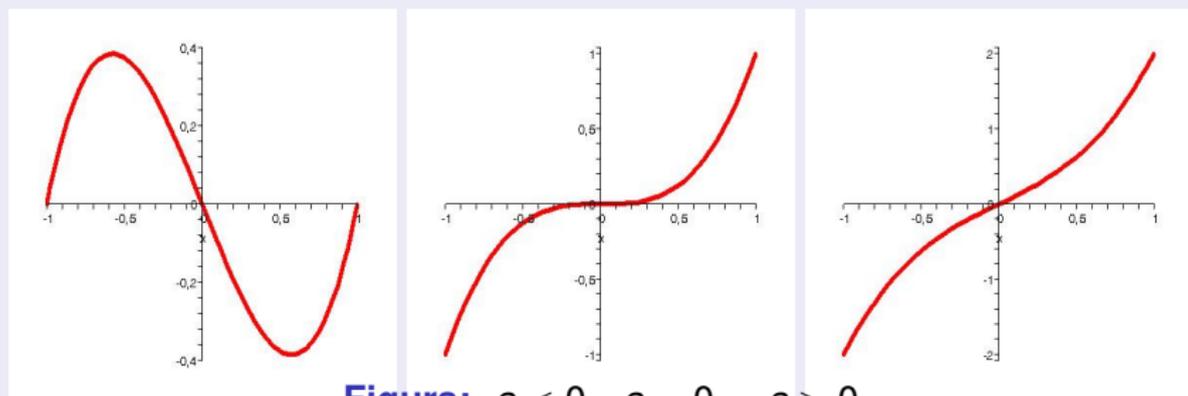


Figura:  $a < 0$ ,  $a = 0$ ,  $a > 0$



- ESTABILIDADE
  
- PERDA DA ESTABILIDADE: BIFURCAÇÃO, CATÁSTROFE.



# Exemplos

- Visão Computacional: Reconhecimento de imagens





Damon, Giblin, Haslinger, *Local features in Natural Images via Singularity theory*, Springer, 2016.



O problema em **Visão Computacional** é estudar imagens de objetos obtidas por projeção num plano de raios de luz refletidos.

## Objetivos

- Determinar as **configurações (formas) locais** das figuras geométricas tais como arestas, cantos, contornos, sombras, cantos. Relacionar essas **configurações estáveis**, com as formas 3-dimensionais e com as posições dos objetos na imagem real.

Quando há movimento das imagens, as formas mudam. Determinar as mudanças nas formas em termos de **transições genéricas (catástrofes, bifurcações)**. Relacionar as mudanças com a estrutura 3-dimensional.



# Hassler Whitney

A **teoria de singularidades** começou com os resultados de Hassler Whitney nos anos 40 e 50 do século XX.

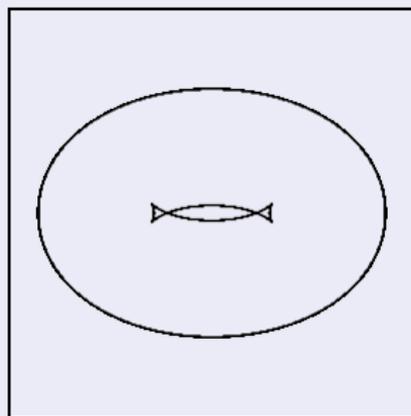
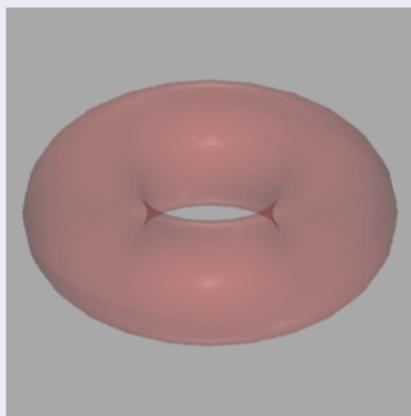
## Hassler Whitney

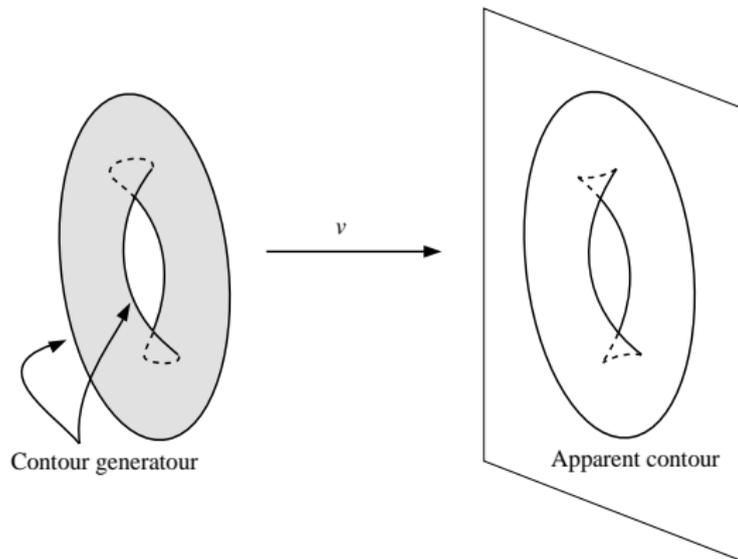


# Mappings of the plane into the plane, Whitney 1955

Ann. of Math. (2) 62 (1955), 374-410.

## Projeção do toro no plano







## O teorema de Whitney

Seja  $S$  uma superfície suave.

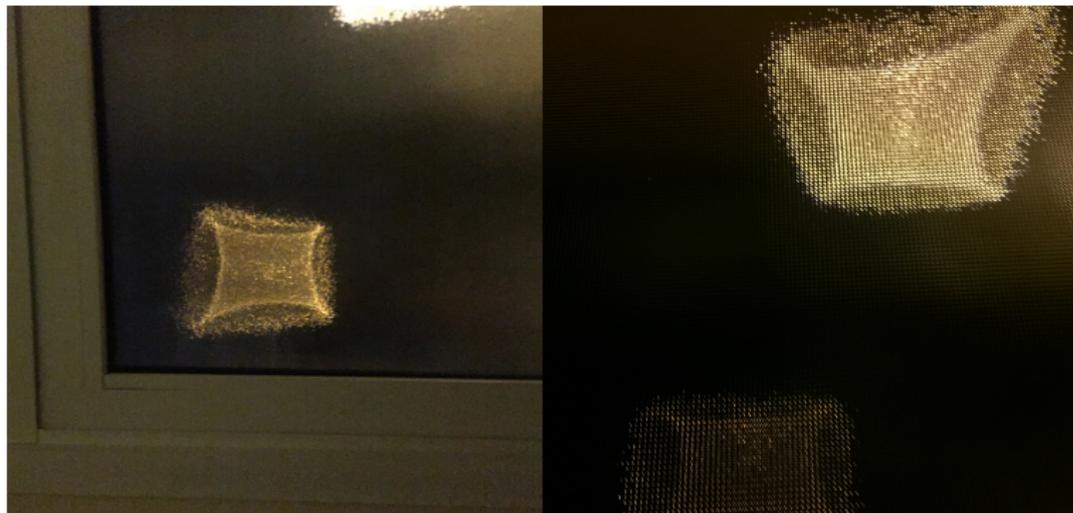
As únicas singularidades estáveis de uma aplicação  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  são dobras e cúspides.

Dada uma  $g : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  que não é estável, podemos encontrar uma  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que é estável e bem próxima de  $g$ .



- Ótica geométrica: Cáusticas e Cáusticas por reflexão





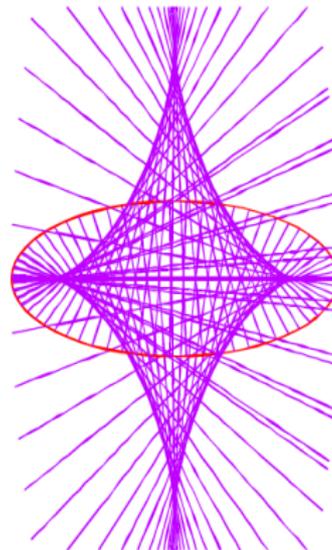
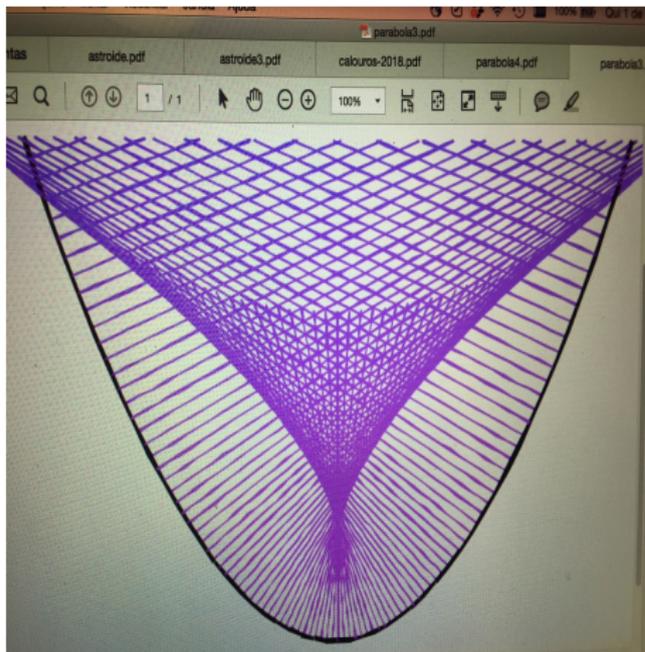
# Cáusticas

Raios de luz que começam em cada ponto de uma curva  $\gamma(I)$  e se propagam na direção de sua respectiva normal.

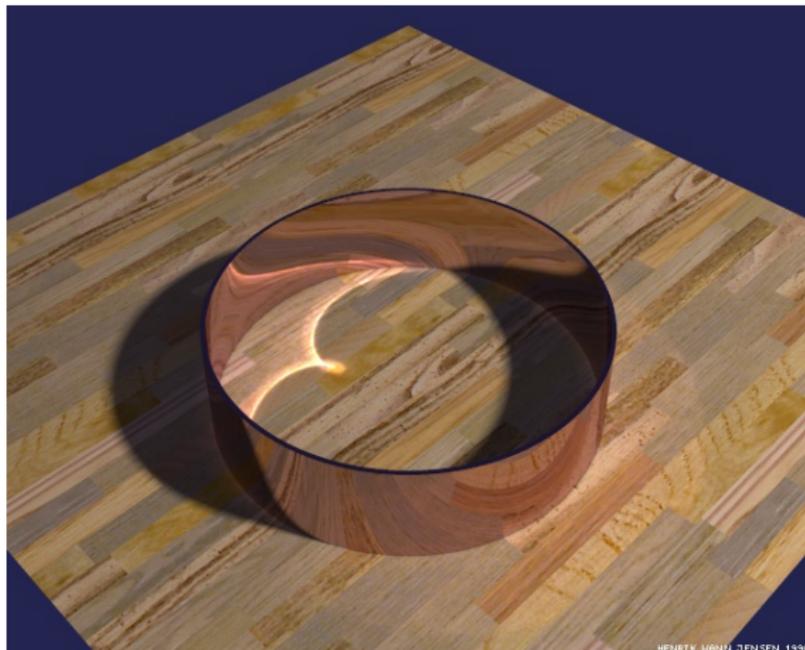
A curva  $\gamma(I)$  é chamada **frente de onda inicial**.

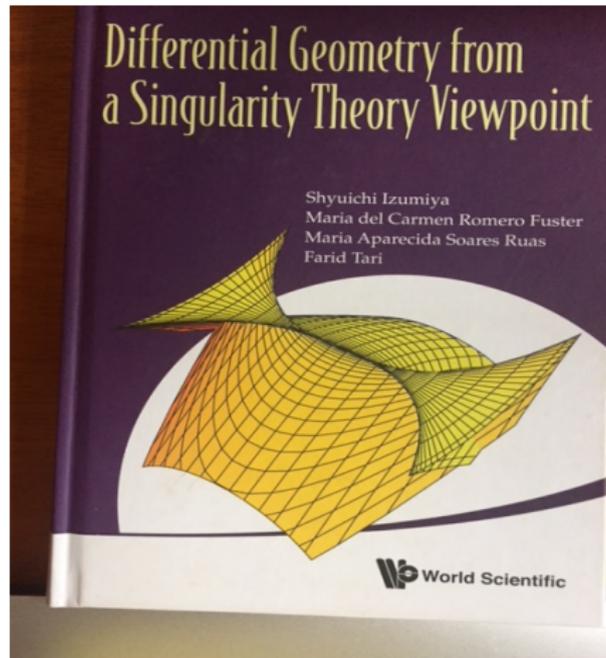
A curva formada no local de maior de maior incidência dos raios refletidos é chamada **Cáustica**.

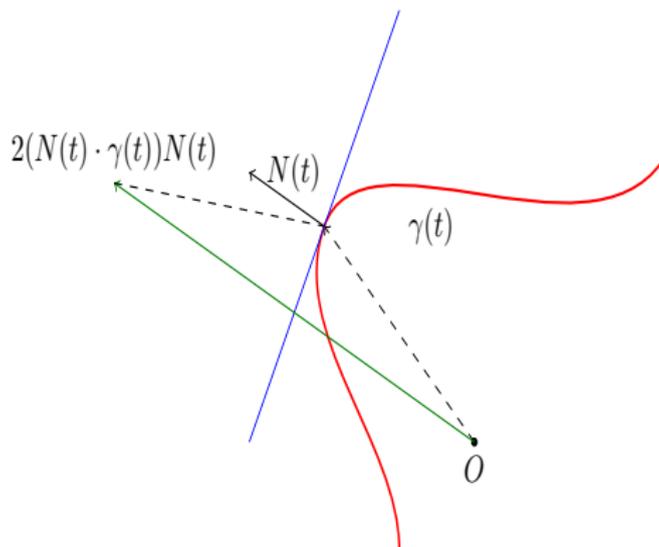




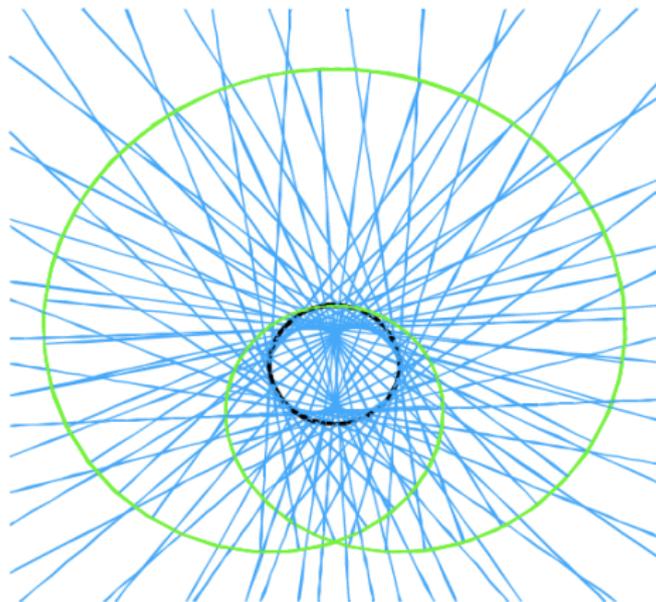
# Cáusticas por reflexão

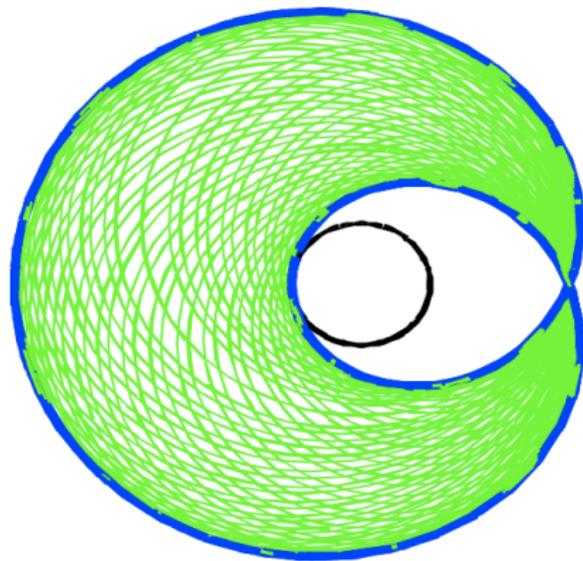






# Ortotômica





Muito obrigada!

