

**Exercício 8.1**

Classificar e desenhar todas as cônicas com equação da forma:

- (i)  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$
- (ii)  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + cx + dy + e = 0$ . Em que situação não é possível colocar nesta forma?

**Exercício 8.2**

Encontre o centro da cônica (se existir) e a(s) direção(ões) do(s) eixo(s) de simetria.

- (i)  $x^2 + 2xy + y^2 - 3x = 0$ ;
- (ii)  $x^2 - 2xy + 4y^2 - 2x - y + 1 = 0$ .

**Exercício 8.3**

- (i) Em termos de equação da cônica, qual o efeito de se transladar a origem do sistema de coordenadas para o centro e rotacionar os eixos coordenados para coincidirem com os eixos de simetria?
- (ii) Como se utiliza a matriz da cônica para procurar o centro da cônica? E os eixos de simetria? Qual a relação dos auto-vetores e auto-valores da matriz da parte quadrática com os eixos de simetria?
- (iii) Quando se efetua uma translação da origem no sistema de coordenadas, os coeficientes da parte quadrática se modificam como? e a parte independente?
- (iv) Quando se efetua uma rotação nos eixos coordenados, o que permanece invariante?
- (v) Quais são as possibilidades para cônicas com determinante da parte quadrática positivo? e nulo? e negativo?

**Exercício 8.4**

Desenhe as seguintes cônicas, deduza a equação e resolva as outras questões colocadas:

- (i) Elipse, de centro  $(1, 2)$ , semi-eixos com  $a = 5$  e  $b = 3$  paralelos aos eixos coordenados dos  $x$  e  $y$ , respectivamente. Qual a excentricidade?
- (ii) Hipérbole, com focos  $(2, 3)$  e  $(-4, 3)$ , e distância entre os vértices 4. Encontre também as assíntotas e suas equações. Qual a excentricidade?
- (iii) Parábola de vértice  $(0, 0)$  e foco  $(3, 4)$ .

Uma cônica pode ser caracterizada como o lugar geométrico dos pontos  $P$  do plano  $e = d(P, F)/d(P, r)$ , onde  $F$  é um ponto fixado e  $r$  uma reta fixada.  $F$  é um foco e  $r$  é chamada uma reta diretriz da cônica. Determine as retas diretrizes da cônicas dos itens acima.

**Exercício 8.5**

Escreva a forma reduzida das elipses:

- (i) com focos  $(0, \pm 6)$  e  $a = 17$ .
- (ii) com extremidades do eixo menor em  $(0, \pm 4)$ , e o comprimento  $L = \frac{8}{5}$  da corda perpendicular ao eixo maior da elipse e que passa por um dos focos.

**Exercício 8.6**

Em cada um dos itens abaixo, determine um novo sistema de coordenadas em que a cônica fica na forma reduzida. Escreva as equações no novo sistema.

- (i)  $x^2 + xy + y^2 = 1$ ;
- (ii)  $xy + 2x - y = 0$ ;
- (iii)  $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 2\sqrt{3}x - 2y = 0$ .

**Exercício 8.7**

Mostre que a equação de uma circunferência em um sistema de coordenadas ortogonais não muda por rotações.

**Exercício 8.8**

Encontre a equação da reta tangente à circunferência  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$  no ponto  $(2, 1 - \sqrt{3})$ .

**Exercício 8.9**

Encontre a equação da reta tangente à elipse  $\frac{(x-1)^2}{4} + (y - 1)^2 = 1$  no ponto  $(2, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$ .

**Exercício 8.10**

Encontre a equação da reta tangente à hipérbole  $\frac{(x-1)^2}{4} - (y - 1)^2 = 1$  no ponto  $(3, 1)$ .

**Exercício 8.11**

Determine os vértices, os focos e a excentricidade da elipse  $3x^2 + 4y^2 = 12$ . Faça um esboço.

**Exercício 8.12**

Escreva a equação reduzida da elipse que tem centro na origem, focos num dos eixos coordenados e passa por  $(3, 2)$  e  $(1, 4)$ .

**Exercício 8.13**

Ache os vértices e a área de um quadrado com lados paralelos aos eixos, inscrito na elipse  $9x^2 + 16y^2 = 100$ .

**Exercício 8.14**

Determine os vértices, os focos, a excentricidade e as assíntotas da hipérbole  $16x^2 - 25y^2 = 400$ . Faça um esboço.

**Exercício 8.15**

Escreva a equação reduzida da hipérbole, dados:

- (i)  $b = 4$ , as assíntotas  $2y = \pm 3x$  (focos no eixo dos  $y$ );
- (ii) as assíntotas  $2y = \pm x$  e um ponto da hipérbole,  $(5, 9)$ .

**Exercício 8.16**

Obtenha a equação da hipérbole com focos em  $(3, -3)$ ,  $(3, 7)$  e  $a = 3$ .

**Exercício 8.17**

Esboce o gráfico da cônica representada por

- (i)  $G(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 2xy + 6\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2 = 0$
- (ii)  $G(x, y) = x^2 - 4y^2 = 4xy - 1 = 0$
- (iii)  $G(x, y) = 16x^2 + 9y^2 - 24xy - 38x - 34y + 71 = 0$

**Exercício 8.18**

Reduza a equação à forma mais simples, através de translação e eventual rotação. Dê o ângulo de rotação. Descreva o conjunto representado.

- (i)  $32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$
- (ii)  $x^2 - 11y^2 - 5xy - x + 37y + 52 = 0$
- (iii)  $17x^2 + 8y^2 - 12xy = 0$