$4^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de Cálculo I

Professor: Maria Aparecida Soares Ruas — *2 de abril de 2006*

Exercício 4.1

Em cada um itens abaixo s é a posição no instante t de um objeto se movendo sobre uma reta. Determine a velocidade no instante t_0.

(1) $s = t^2 + 1$ em $t_0 = 1$ (3) $s = \sqrt{t}$ em $t_0 = 4$

(2) $s = \frac{1}{t}$ em $t_0 = 2$ (4) $s = \frac{1}{2}t^2$ em $t_0 = 2$.

Exercício 4.2

Em cada um dos itens abaixo encontre a reta tangente pelo ponto (x_0, y_0).

(1) $y = 1 + x^2$ (3) $y = x^3$ (5) $y = x|x|$

(2) $y = \frac{x^2}{2}$ (4) $y = \sqrt{x}$

Exercício 4.3

Em cada um dos itens abaixo determine os intervalos onde o gráfico da função está subindo e em quais intervalos está descendo:

(1) $y = 2x^2$ (2) $y = 1 - x^2$ (3) $y = x^4$

Exercício 4.4

Uma bola é atirada para cima do topo de um edificio. Depois de t segundos sua altura é $h = 30 + 5t - 5t^2$ (em metros).

(i) Qual a altura do edifício?

(ii) Qual a velocidade da bola no instante t? Qual a velocidade inicial?

(iii) Qual a altura máxima que a bola atinge? Quando é que ela atinge esta altura?

(iv) Quando é que a bola atinge o chão? Com que velocidade?

Exercício 4.5

Suponha que um objeto oscila (para cima e para baixo) preso a uma mola de maneira que sua distância d ao ponto de repouso inicial no instante t é dada $d = \operatorname{sen} t$.

(i) Onde o objeto está quando $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, e 2π?

(ii) Calcule a velocidade do objeto num instante t_0.

(iii) Qual a velocidade e qual a direção que o objeto tem quando $t = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π?

Exercício 4.6

Calcular $f'(x)$ nos seguintes casos:

a) $f(x) = 37$, *b)* $f(x) = 17x - 65$ *c)* $f(x) = x^3 + x$

d) $f(x) = (1 + \sqrt{x})^2$ *e)* $f(x) = \dfrac{6}{x^2}$ *f)* $f(x) = \dfrac{3x^3 - 2x^2 + 4}{4x^3 + 5x^2}$

g) $f(x) = \dfrac{\cos(x)\operatorname{cotg}(x)}{\sec(x) - \cos(x)}$ *h)* $f(x) = \dfrac{2\cos(x)}{x^2 + \frac{1}{2}x + 1}$ *i)* $f(x) = \dfrac{x^3 \sec(x)\operatorname{tg}(x)}{(x^2+1)\cos(x)}$

Exercício 4.7

Verifique se as funções abaixo são diferenciáveis no ponto $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{, se } x \leq 2 \\ x + 2 & \text{, se } x < 2 \end{cases}$ *b)* $f(x) = \begin{cases} x\operatorname{sen}(\pi x) & \text{, se } x \leq 2 \\ (x^2+1)\cos(\pi x) & \text{, se } x < 2 \end{cases}$

Exercício 4.8

Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & , \text{se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{se } x = 0 \end{cases}$. Encontre $f'(x)$, para todo $x \in R$.

Pergunta-se: f' é contínua em R?

Exercício 4.9

Seja $f : R \to R$ tal que $f(x+h) = f(x)f(h)$, para todo $x, h \in R$ com $f(0) \neq 0$.

a) Calcule $f(0)$, se existir.

b) Mostre que se existir $f'(0)$ então f é diferenciável em R e $f'(x) = f'(0)f(x)$, para todo $x \in R$.

Exercício 4.10

Seja $f : R \to R$ uma função diferenciável em R. Mostre que:

a) Se f é par então f' é ímpar.

b) Se f é ímpar então f' é par.

c) Se f é τ-periódica então f' é τ-periódica.

Exercício 4.11

Mostre que a reta tangente à curva $y = \frac{1}{x}$ não intersecciona esta curva com exceção do ponto de tangência.

Exercício 4.12

Considere a função $y = x^3 - x$.

(1) Quais são os pontos onde o gráfico intersecciona o eixo dos x.

(2) Quais são os pontos onde o gráfico intersecciona o eixo dos y.

(3) Calcule a inclinação da reta tangente ao gráfico num ponto (x_0, y_0).

(4) Para quais x_0 a inclinação é positiva? O que significa isto para o gráfico?

(5) Para quais x_0 a inclinação é negativa? O que significa isto para o gráfico?

(6) Para quais x_0 a reta tangente é horizontal? O que significa isto para o gráfico?

(7) Usando as informações obtidas de (1) a (6) você consegue esboçar o gráfico de $y = x^3 - x$.

Exercício 4.13

Sejam f e g duas funções tais que $f(2) = 5, f'(2) = \frac{1}{2}, g(0) = 2$ e $g'(0) = 3$. Determine a reta tangente ao gráfico de $y = f(g(x))$ em $x = 0$.

Exercício 4.14

Determine $(f \circ g)'(3)$ se $f(1) = 0, f'(1) = 2g(2)g(3) = 1$ e $g'(3) = \frac{3}{2}$.