$4.^a$ Lista de Exercício de SMA-304 Álgebra Linear

Exercício 1. Quais das seguintes aplicações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ são operadores lineares ?.

a) $F_1(x, y, z) = (x - y, x + y, 0)$;

b) $F_2(x, y, z) = (2x - y + z, 0, 0)$;

c) $F_3(x, y, z) = (x, x, x)$;

d) $F_4(x, y, z) = (2x^2 + 3y, x, z)$.

Exercício 2. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear assim definido na base canônica: $F(1, 0, 0) = (2, 3, 1)$, $F(0, 1, 0) = (5, 2, 7)$, $F(0, 0, 1) = (-2, 0, 7)$. Determinar $F(x, y, z)$, onde (x, y, z) é um vetor genérico do $\mathbb{R}^3$. Mostrar que F é um operador linear.

Exercício 3. Sejam U e V sub-espaços de um espaço W tais que $W = U \oplus V$. Sejam P_1 e P_2 as aplicações de W em W tais que todo $w = u + v$ de W (com $u \in U$ e $v \in V$) associam, respectivamente, u e v, ou seja $P_1(w) = u$ e $P_2(w) = v$. Mostrar que P_1 e P_2 são lineares.

Exercício 4. Seja F o operador linear do $\mathbb{R}^2$ tal que $F(1, 0) = (2, 1)$ e $F(0, 1) = (1, 4)$.

a) Determinar $F(2, 4)$;

b) Determinar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x, y) = (2, 3)$;

c) Provar que F é sobrejetor e injetor (bijetor).

Exercício 5. Assinale **V**(erdadeiro) ou **F**(also): É dada uma transformação linear $F : E \to V$.

( ) Se $v \in E$ é tal que $F(v) = 0$ então $v = 0$

( ) Se $F(w) = F(u) + F(v)$ então $w = u + v$

( ) Se v é combinação linear de $u_1, \ldots, u_m$ então $F(v)$ é combinação linear de $F(u_1), \ldots, F(u_m)$.

( ) Se $u, v, w \in E$ são colineares (isto é, pertencentes a uma mesa reta) então $F(u)$, $F(v)$ e $F(w)$ são colineares.

Exercício 6. Seja $F : U \to V$ uma transformação linear com a seguinte propriedade: se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de U, então $\{F(u_1, \ldots, F(u_n)\}$ é linearmente independente em V. Provar que F é injetora.

Exercício 7. Para cada uma das transformações lineares abaixo determinar uma base e a dimensão do núcleo e da imagem:

a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = x + y - z$.

b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (2x, x + y)$.

c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $F(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z, 2x - y + z, -y)$.

d) $F : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $F(f(t)) = t^2 f''(t)$.

e) $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $F(X) = MX + X$, onde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

f) $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $F(X) = MX - XM$, onde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício 8. Assinale verdadeiro (V) ou (F):

( ) Uma transformação linear $F : E \to V$ é sobrejetiva se, e somente se, $dim Ker(F) = dim E - dim V$.

( ) Dada a transformação linear $F : E \to V$, para todo b fixado em V, o conjunto $G = \{x \in E;\ F(x) = b\}$ é um subespaço vetorial E.

( ) Para todo operador linear $F : E \to E$, tem-se $E = Ker(F) \oplus Im(F)$.

( ) Todo operador linear injetivo no espaço $C^0(\mathbb{R})$ das funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é também sobrejetivo.

( ) O núcleo de toda transformação linear $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tem dimensão maior ou igual a 3.

( ) Se a transformação linear $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é injetiva, então $dim Im(F) = m$.

Exercício 9. Determinar um operador linear $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja imagem é gerada por $(2, 1, 1)$ e $(1, -1, 2)$.

Exercício 10. Considere o operador linear F do $\mathbb{R}^3$ definido por $F(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$; $F(0, 1, 0) = (1, 0, 1)$ e $F(0, 1, 2) = (0, 0, 4)$. F é inversível? Se for, determine o isomorfismo inverso.

Exercício 11. Consideremos uma transformação linear $F : U \to V$. Se $dim U > dim V$, prove que existe um vetor não nulo $u_0 \in U$ tal que $F(u_0) = 0$ (vetor nulo de V). (Ou seja, F não é injetora.)

Exercício 12. Sejam $F, G \in L(\mathbb{R}^3)$ assim definidos:

$$F(x, y, z) = (x + y, z + y, z) \text{ e } G(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$$

Determinar:

a) $F \circ G$;

b) $Ker(F \circ G)$ e $Im(G \circ F)$.

c) uma base e a dimensão de $Ker(F^2 \circ G)$.

Exercício 13. Mostre que os operadores F, G, $H \in L(\mathbb{R}^2)$ dados por $F(x,y) = (x, 2y)$, $G(x,y) = (y, x+y)$ e $H(x,y) = (0,x)$ formam um conjunto L.I. em $L(\mathbb{R}^2)$.

Exercício 14. Seja $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base de um espaço vetorial de dimensão n. Considerando o operador linear $T \in L(V)$ tal que $T(u_1) = u_2$, $T(u_2) = u_3$, …, $T(u_n) = u_1$, mostre que $T^n = I$ mas que $T^{n-1} \neq I$.

Exercício 15. Determinar as matrizes das seguintes transformações lineares em relação às bases canônicas dos respectivos espaços:

(I) $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $F(x,y,z) = (x+y, z)$;

(II) $F \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ definida por $F(x,y) = (x+y, x, x-y)$;

(III) $F \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ definida por $F(x,y,z,t) = 2x + y - z + 3t$;

(IV) $F \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ definida por $F(x) = (x, 2x, 3x)$.

Exercício 16. Seja F o operador linear de $M_2(\mathbb{R})$ dado por

$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X$$

para todo X em $M_2(\mathbb{R})$. Sendo B a base canônica do espaço $M_2(\mathbb{R})$ determine o traço da matriz $(F)_B$. (Nota: traço=soma dos termos da diagonal principal.)

Exercício 17. Sejam F e G operadores lineares do $\mathbb{R}^3$ tais que: $F(x,y,z) = (x, 2y, y-z)$ e que a matriz de $2F - G$ em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine a matriz de G em relação à base canônica. Determinar também $G(x,y,z)$.