USP/ICMC/SMA - 1^a Prova de SMA - 305 - Álgebra I

Professor: Daniel Levcovitz

Nome: ______________________________

N.^{o} USP: __________ 02.05.2019

Questão	Nota
6.^{a}	
7.^{a}	
8.^{a}	
Total	

PROVA PARA A LICENCIATURA EM MATEMÁTICA.

Questões testes. Marque, a caneta, apenas uma das alternativas. Não serão aceitas rasuras. A questão rasurada será anulada. Não deixe de marcar alguma alternativa, pois uma questão errada não anula uma certa! Não é preciso justificar a resposta! As folhas grampedads são APENAS para as questões discursivas. Cada teste vale 1 ponto.

1. Seja G um grupo qualquer e sejam $a, b, c, d, g \in G$ elementos deste grupo. Qual das seguintes afirmações é **FALSA**?

   (a) Se $ab = cd$ então $agb = cgd$

   (b) $(ab)(cd) = a((bc)d))$

   (c) $(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1}$

   (d) $(aba^{-1})^{2019} = ab^{2019}a^{-1}$

   (e) Se $ab = ac$ então $b = c$

2. Considere no grupo S_7 a permutação $\alpha = (134)(26)(57)$. Sua ordem é

   (a) 5

   (b) 10

   (c) 6

   (d) 20

   (e) 2

3. Considere no grupo S_9 as seguintes permutações

$$\pi = (197)(23)(5684) \qquad \sigma = (1389)(24567).$$

A permutação $\sigma\pi\sigma^{-1}$ é igual a

(a) σ^2
(b) π^3
(c) $(312)(48)(6795)$
(d) $(123)(456789)$
(e) id

4. Considere o grupo $GL_2(\mathbb{R})$ das matrizes inversíveis 2×2 com entradas reais. Qual dos seguintes subconjuntos **NÃO** é subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$?

(a) $\{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$
(b) $\{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$
(c) $\{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid A^T A = I_2\}$
(d) $\{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det A = -1\}$
(e) $\{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ é diagonal}\}$

5. Considere as seguintes afirmações:

(I) O grupo S_3 possui, exatamente, um subgrupo de ordem 3 e três subgrupos de ordem 2 que não são triviais.

(II) O grupo D_4 possui, exatamente, um subgrupo de ordem 4 e cinco subgrupos de ordem 2 que não são triviais.

(III) O subgrupo $K = \{1, (123), (132)\}$ do grupo S_3 satisfaz $gK = Kg$, para todo $g \in S_3$.

(IV) O subgrupo $H = \{1, (12)\}$ do grupo S_3 satisfaz $gK = Kg$, para todo $g \in S_3$.

Pode-se afirmar que:

(a) Somente a afirmação (I) é verdadeira.
(b) As afirmações (III) e (IV) são falsas.
(c) As afirmações (I),(II) e (III) são verdadeiras.
(d) As afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
(e) Todas as afirmações são verdadeiras.

Questões discursivas. Resolva-as, a caneta ou a lápis, nas folhas grampeadas. Você pode resolvê-las em qualquer ordem.

6. (Valor: 2,0 pontos) Prove que se $(A, +, \cdot)$ é um anel com unidade (não necessariamente comutativo) então são válidas as seguintes propriedades, quaisquer que sejam $x, y \in A$.

   a) $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$

   b) $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$

7. (1 ponto) Mostre que o conjunto de números complexos $z = a+bi$ com $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ é um grupo com o produto usual de $\mathbb{C}$.

8. (2 pontos) Seja G um grupo de ordem p, onde p é um número primo. Mostre que G é cíclico.

USP/ICMC/SMA - 1ª Prova de SMA - 305 - Álgebra I

Professor: Daniel Levcovitz

Nome: ____

N.º USP: __________ 02.05.2019

Questão	Nota
4.ª	
5.ª	
6.ª	
7.ª	
Total	

PROVA PARA A MATEMÁTICA E MATEMÁTICA APLICADA.

Questões testes. Marque, a caneta, apenas uma das alternativas. Não serão aceitas rasuras. A questão rasurada será anulada. Não deixe de marcar alguma alternativa, pois uma questão errada não anula uma certa! Não é preciso justificar a resposta! As folhas grampedads são APENAS para as questões discursivas. Cada teste vale 1 ponto.

1. Considere no grupo S_7 a permutação $\alpha = (134)(26)(57)$. Sua ordem é

   (a) 5

   (b) 10

   (c) 6

   (d) 20

   (e) 2

2. Considere o grupo $GL_2(\mathbb{R})$ das matrizes inversíveis 2×2 com entradas reais. Qual dos seguintes subconjuntos **NÃO** é subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$?

   (a) $\{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$

   (b) $\{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$

   (c) $\{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid A^T A = I_2\}$

   (d) $\{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det A = -1\}$

   (e) $\{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ é diagonal}\}$

3. Considere as seguintes afirmações:

   (I) O grupo S_3 possui, exatamente, um subgrupo de ordem 3 e três subgrupos de ordem 2 que não são triviais.

   (II) O grupo D_4 possui, exatamente, um subgrupo de ordem 4 e cinco subgrupos de ordem 2 que não são triviais.

   (III) O subgrupo $K = \{1, (123), (132)\}$ do grupo S_3 satisfaz $gK = Kg$, para todo $g \in S_3$.

   (IV) O subgrupo $H = \{1, (12)\}$ do grupo S_3 satisfaz $gK = Kg$, para todo $g \in S_3$.

   Pode-se afirmar que:

   (a) Somente a afirmação (I) é verdadeira.

   (b) As afirmações (III) e (IV) são falsas.

   (c) As afirmações (I),(II) e (III) são verdadeiras.

   (d) As afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

   (e) Todas as afirmações são verdadeiras.

   Questões discursivas. Resolva-as, a caneta ou a lápis, nas folhas grampeadas. Você pode resolvê-las em qualquer ordem.

4. (Valor: 2,0 pontos) Prove que se $(A, +, \cdot)$ é um anel com unidade (não necessariamente comutativo) então são válidas as seguintes propriedades, quaisquer que sejam $x, y \in A$.

   a) $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$

   b) $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$

5. (1 ponto) Mostre que o conjunto de números complexos $z = a+bi$ com $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ é um grupo com o produto usual de $\mathbb{C}$.

6. (2 pontos) Seja G um grupo de ordem p, onde p é um número primo. Mostre que G é cíclico.

7. (Valor: 2,0 pontos) Mostre que todo domínio de integridade finito é um corpo.