TAREFAS

1. No plano usual são dados uma reta L e um ponto p. Será que é possível, utilizando apenas uma régua, construir a reta paralela a L que passa por p ?

2. No plano usual são dadas duas retas paralelas distintas L_1, L_2 e um ponto p. Será que é possível, utilizando apenas uma régua, construir a reta paralela a L_1, L_2 que passa por p ?

3. Uma reta divide o plano usual em duas partes. Em quantas partes é divido o plano projetivo real por quatro retas genéricas ?

4. Descreva o espaço de pares não-ordenados de pontos na circunferência.

5. Prove que $\varsigma_p : \mathbb{S}^n \setminus \{-p\} \ni q \mapsto \frac{q+p}{1+\langle q,p\rangle} - p \in \mathrm{T}_p\mathbb{S}^n$ e $\varsigma_p^{-1} : \mathrm{T}_p\mathbb{S}^n \ni t \mapsto \frac{2(t+p)}{1+\langle t,t\rangle} - p \in \mathbb{S}^n \setminus \{-p\}$ para a projeção esteriográfica ς_p.

6. Prove que a projeção estereográfica estabelece uma correspondência biunívoca entre esferas em $\mathbb{S}^d$ (= interseções de $\mathbb{S}^d$ com espaços afins em V) e esferas ou espaços afins em $\mathrm{T}_p\,\mathbb{S}^n$.

7. Mostre que a projeção estereográfica preserva ângulos entre curvas.

8. Verifique que espaços projetivos e esferas (e, mais geralmente, grassmannianas) são variedades suaves.

9. Prove que a esfera definida como subespaço é isomorfa (= *difeomorfa*) à esfera definida como quociente.

10. Seja V um espaço $\mathbb{K}$-linear de dimensão finita. Verifique que a fórmula $t_p f = \lim\limits_{\mathbb{R}\ni\varepsilon\to 0} \frac{f(p+\varepsilon t)-f(p)}{\varepsilon}$ para $p \in U \subset\!\circ\, V$ e $t \in V$ identifica os espaços $\mathbb{R}$-lineares $\mathrm{T}_p\,U = V$.

11. Seja V um espaço $\mathbb{K}$-linear de dimensão finita e seja $V^\times \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_\mathbb{K}V$ a projeção. Verifique que a fórmula $t_p f := \lim\limits_{\mathbb{R}\ni\varepsilon\to 0} \frac{f\circ\pi(p+\varepsilon\hat{t})-f\circ\pi(p)}{\varepsilon}$, onde $\hat{t} \in \mathrm{Lin}_\mathbb{K}(p,V)$ é um levantamento arbitrário de $t \in \mathrm{Lin}_\mathbb{K}(p,V/p)$, estabelece uma identificação canônica $\mathrm{T}_p\,\mathbb{P}_\mathbb{K}V = \mathrm{Lin}_\mathbb{K}(p,V/p)$ de espaços $\mathbb{R}$-lineares. (A afirmação análoga vale para grassmannianas.)

12.* Mostre que a estrutura da variedade suave em $\mathrm{T}\,M$ não depende da escolha de cobertura de M por abertos em espaços lineares.

13. Verifique que as operações $+$ e $\cdot$ são suaves em $\mathrm{T}\,M$, i.e., as aplicações $\mathrm{T}\,M \times_M \mathrm{T}\,M \xrightarrow{+} \mathrm{T}\,M$, $(t_1,t_2) \mapsto t_1 + t_2$, e $\mathbb{R}\times\mathrm{T}\,M \xrightarrow{\cdot} \mathrm{T}\,M$, $(r,t)\mapsto r\cdot t$, são suaves.

14. Mostre que o comprimento de uma curva suave por partes não depende da parametrização da curva.

15. Sejam $]a,b[\xrightarrow{c} \mathbb{P}_\mathbb{K}V$ uma curva suave e $]a,b[\xrightarrow{c_0} V$ um levantamento suave de c para V, $c(s) \notin \mathrm{S}\,V$. Mostre que o vetor tangente a curva c em $c(s)$ corresponde a uma aplicação $\mathbb{K}$-linear $\mathbb{K}c_0(s) \xrightarrow{\dot{c}(s)} c_0(s)^\perp$ tal que $c_0(s) \mapsto \pi\big[c_0(s)\big]\dot{c}_0(s)$.

16. Note que, pelos pontos $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_\mathbb{K}V$, $p_1 \neq p_2$,

• não passa nenhuma geodésica se $p_1, p_2 \in \mathrm{S}\,V$ e os pontos são *ortogonais,* i.e., $\langle p_1, p_2\rangle = 0$;

• passa uma única geodésica se os pontos não são ortogonais ou se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $p_1 \notin \mathrm{S}\,V$;

• passam infinitas geodésicas se os pontos são ortogonais, $p_1 \notin \mathrm{S}\,V$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; tais geodésicas estão na reta projetiva $\mathbb{P}^1_\mathbb{K}$ que liga p_1, p_2 e qualquer geodésica contida em $\mathbb{P}^1_\mathbb{K}$ que passa por p_1 necessariamente passa por p_2.

17. Seja $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V \setminus \mathrm{S}\,V$ e seja $D \leq \mathrm{T}_p\,\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ um subespaço $\mathbb{R}$-linear unidimensional. Prove que existe uma única geodésica Γ que passa por p com vetor tangente em D. A afirmação é válida sem a hipótese $p \notin \mathrm{S}\,V$?

18. Prove as sequintes afirmações para a fita de Möbius-Lorentz e introduza conceitos necessários. Saindo por geodésica com vetor tangente dentro do *cone de luz,* temos correspondentes geodésicas *ultraparalelas*; por geodésica com vetor tangente fora do cone, as que se interceptam; por geodésica tangente ao cone, as *assintóticas.*

19. Mostre que a aplicação $z \mapsto \frac{2z}{1+|z|^2}$ providencia uma isometria (a menos de um fator constante) entre o disco unitário em $\mathbb{C}$ e o disco unitário $\mathbb{D}$ no plano afim.

20.* Resolva a tarefa anterior sem uso de coordenadas.

21. Verifique, acuradamente, todos os detalhes de todos os 6 exemplos apresentados.

22.* Sejam $W \leq V$ um subespaço $\mathbb{R}$-linear e $p \in W$. Se $\min\limits_{0 \neq w \in W} \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}w \cap W) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}p \cap W)$, o ponto $p \in W$ é dito *projetivamente suave em* W. Denotamos por $S \subset W$ o conjunto de todos os pontos projetivamente suaves em W. Prove que $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}S \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ é subvariedade suave e que o vetor tangente $t \in \mathrm{T}_p\,\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V = \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p)$ no ponto $p \in S$ pertence a $\mathrm{T}_p\,\mathbb{P}_{\mathbb{K}}W$ se e só se $tp \in W + \mathbb{K}p$.

23. Prove o sequinte lema. Suponhamos que as coleções $p_1, \dots, p_n \in V$ e $p'_1, \dots, p'_n \in V$ geram subespaços $\mathbb{K}$-lineares não-degenerados. Então, para a existência de $g \in \mathrm{U}\,V$ tal que $gp_i = p'_i$ para todo i, é necessário e suficiente que as matrizes de Gram das coleções coincidam.

24.** Formule e prove o lema anterior sem a hipótese de não-degenerescência.

25. Prove que $\widehat{\mathrm{PU}}V$ é o grupo de todas as isometrias, i.e., que $\widehat{\mathrm{PU}}V = \mathrm{Isom}\,\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$.

26. Descubra a desigualdade triangular no caso elíptico.

27. Deduza a primeira lei dos cossenos para a esfera: $\cos(2l_3) = \cos(2l_1)\cos(2l_2) + \cos\alpha \sin(2l_1)\sin(2l_2)$, onde $0 < \alpha < \pi$ é o ângulo interior do triângulo no vértice p_2.

28. Deduza a lei dos senos para a esfera: $\frac{\sin(2l_1)}{\sin\alpha_3} = \frac{\sin(2l_2)}{\sin\alpha_1} = \frac{\sin(2l_3)}{\sin\alpha_2}$, onde α_i é o ângulo interior do triângulo no vértice p_i.

29. Deduza as primeira e segunda leis dos cossenos e a lei dos senos para o disco de Poincaré: $\cosh(2l_3) = \cosh(2l_1)\cosh(2l_2) - \cos\alpha_2 \sinh(2l_1)\sinh(2l_2)$, $\cos\alpha_2 + \cos\alpha_2\cos\alpha_3 = \cosh(2l_3)\sin\alpha_2\sin\alpha_3$, $\frac{\sinh(2l_1)}{\sin\alpha_3} = \frac{\sinh(2l_2)}{\sin\alpha_1} = \frac{\sinh(2l_3)}{\sin\alpha_2}$.