

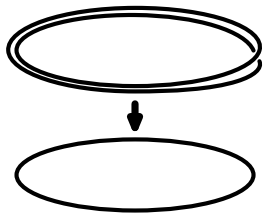
# Faces algébricas da geometria

Sasha Ananin

UNICAMP

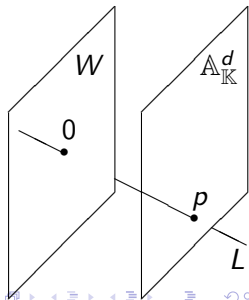
02 de julho de 2013

# Espaços projetivos e seus parentes

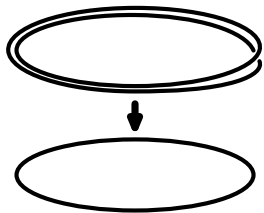


**Definição.** Vamos denotar por  $\mathbb{K}$  um dos corpos  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  e seja  $V$  um espaço  $\mathbb{K}$ -linear de dimensão finita,  $\dim_{\mathbb{K}} V = d + 1$ . **O espaço projetivo**  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  ou  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^d$  é  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V := V^{\times} / \mathbb{K}^{\times}$ , onde  $X^{\times} := X \setminus \{0\}$  e, portanto,  $\mathbb{K}^{\times}$  é o grupo multiplicativo do corpo  $\mathbb{K}$ .

Em outras palavras, os pontos do espaço projetivo são  $\mathbb{K}$ -retas em  $V$  que passam por 0. É claro que  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  é obtido identificando-se pontos diametralmente opostos da circunferência e, portanto, também é uma circunferência.



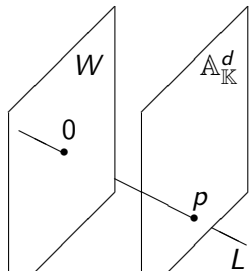
# Espaços projetivos e seus parentes



**Definição.** Vamos denotar por  $\mathbb{K}$  um dos corpos  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  e seja  $V$  um espaço  $\mathbb{K}$ -linear de dimensão finita,  $\dim_{\mathbb{K}} V = d + 1$ . **O espaço projetivo**  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  ou  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^d$  é  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V := V^{\times} / \mathbb{K}^{\times}$ , onde  $X^{\times} := X \setminus \{0\}$  e, portanto,  $\mathbb{K}^{\times}$  é o grupo multiplicativo do corpo  $\mathbb{K}$ .

Em outras palavras, os pontos do espaço projetivo são  $\mathbb{K}$ -retas em  $V$  que passam por 0. É claro que  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  é obtido identificando-se pontos diametralmente opostos da circunferência e, portanto, também é uma circunferência.

O subespaço  $\mathbb{K}$ -linear  $W \leq V$  dá origem ao subespaço **linear**  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} W \leq \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ . Seja  $W \leq V$  um subespaço  $\mathbb{K}$ -linear de codimensão 1 e seja  $0 \notin \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^d \leq V$  um hiperplano paralelo a  $W$ . Visto a partir do 0,  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^d$  se identifica com uma parte do espaço projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ . Claro que  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^d \sqcup \mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$ , i.e.,  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^d = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^d \sqcup \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{d-1}$ .

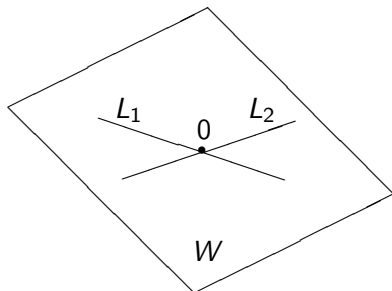
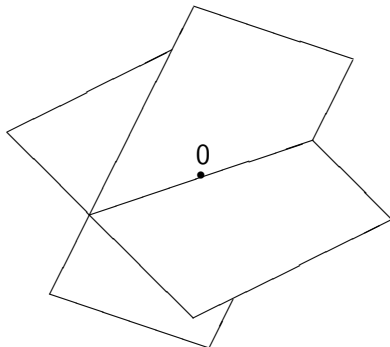


# Espaço projetivo

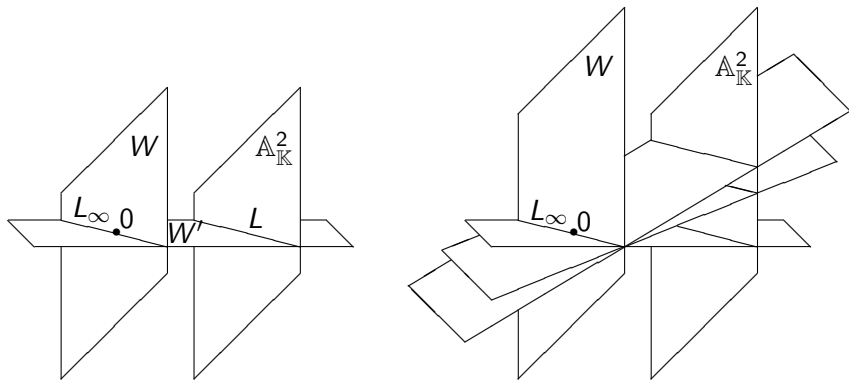
Logo,  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^d$  é o “usual” espaço afim  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^d$  mais o hiperplano  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{d-1}$  no “infinito”. Observamos que, em tal decomposição, podemos escolher qualquer hiperplano como infinito.

# Espaço projetivo

Logo,  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^d$  é o “usual” espaço afim  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^d$  mais o hiperplano  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{d-1}$  no “infinito”. Observamos que, em tal decomposição, podemos escolher qualquer hiperplano como infinito.



No plano projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$  não há retas paralelas e, por quaisquer dois pontos distintos, passa uma única reta.



Retas “usuais” em  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ , sendo completadas cada qual pelo seu ponto no infinito  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ , são retas em  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ . Assim, a reta no infinito  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$  é composta de tais pontos. Mais ainda, as retas em  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$  são paralelas se e só se os correspondentes pontos em  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$  coincidem.

Utilizando, se necessário, uma régua “projetiva”, e escolhendo adequadamente a reta no infinito, é possível resolver as seguintes tarefas:

**Tarefa.** No plano usual são dados uma reta  $L$  e um ponto  $p$ . Será que é possível, utilizando apenas uma régua, construir a reta paralela a  $L$  que passa por  $p$  ?

**Tarefa.** No plano usual são dadas duas retas paralelas distintas  $L_1, L_2$  e um ponto  $p$ . Será que é possível, utilizando apenas uma régua, construir a reta paralela a  $L_1, L_2$  que passa por  $p$  ?

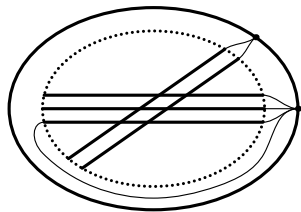
# Espaço projetivo

Utilizando, se necessário, uma régua “projetiva”, e escolhendo adequadamente a reta no infinito, é possível resolver as seguintes tarefas:

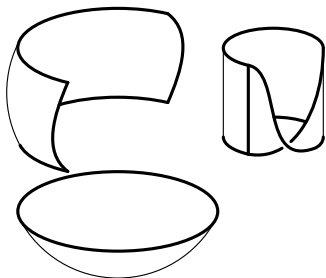
**Tarefa.** No plano usual são dados uma reta  $L$  e um ponto  $p$ . Será que é possível, utilizando apenas uma régua, construir a reta paralela a  $L$  que passa por  $p$ ?

**Tarefa.** No plano usual são dadas duas retas paralelas distintas  $L_1, L_2$  e um ponto  $p$ . Será que é possível, utilizando apenas uma régua, construir a reta paralela a  $L_1, L_2$  que passa por  $p$ ?

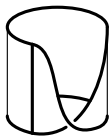
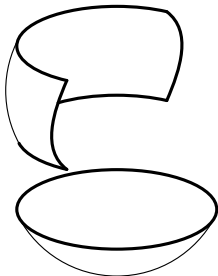
Esquemáticamente, temos o apresentado esboço de  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ . Para vislumbrar o verdadeiro plano projetivo real  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ , identificamos pontos diametralmente opostos da esfera  $\mathbb{S}^2$ , cortando-a previamente em 4 pedaços e excluindo 2 “redundantes”.







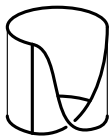
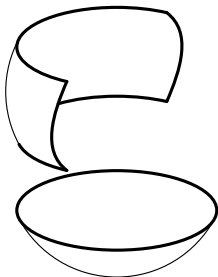
Obtemos um disco e uma fita de Möbius, colados ao longo de seus bordos.



Obtemos um disco e uma fita de Möbius, colados ao longo de seus bordos.

**Tarefa.** Uma reta divide o plano usual em duas partes. Em quantas partes é dividido o plano projetivo real por quatro retas genéricas ?

**Tarefa.** Descreva o espaço de pares não-ordenados de pontos na circunferência.

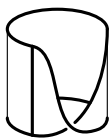
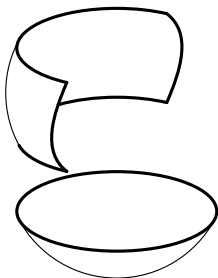


Obtemos um disco e uma fita de Möbius, colados ao longo de seus bordos.

**Tarefa.** Uma reta divide o plano usual em duas partes. Em quantas partes é dividido o plano projetivo real por quatro retas genéricas ?

**Tarefa.** Descreva o espaço de pares não-ordenados de pontos na circunferência.

**Convenções.** Seja  $V^\times \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  a projeção e seja  $S \subset V$  um subconjunto arbitrário. Denotamos por  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} S := \pi(S \setminus \{0\}) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  a **projetivização** de  $S$ . Frequentemente, escreveremos um mesmo símbolo  $p$  para um ponto do espaço projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ , para seu representante em  $V$  e para o correspondente espaço unidimensional  $\mathbb{K}$ -linear em  $V$ .



Obtemos um disco e uma fita de Möbius, colados ao longo de seus bordos.

**Tarefa.** Uma reta divide o plano usual em duas partes. Em quantas partes é dividido o plano projetivo real por quatro retas genéricas ?

**Tarefa.** Descreva o espaço de pares não-ordenados de pontos na circunferência.

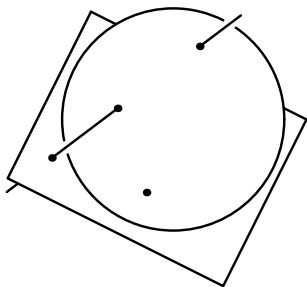
**Convenções.** Seja  $V^\times \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  a projeção e seja  $S \subset V$  um subconjunto arbitrário. Denotamos por  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} S := \pi(S \setminus \{0\}) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  a **projetivização** de  $S$ . Frequentemente, escreveremos um mesmo símbolo  $p$  para um ponto do espaço projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ , para seu representante em  $V$  e para o correspondente espaço unidimensional  $\mathbb{K}$ -linear em  $V$ .

Coordenadas lineares  $(x_0, x_1, \dots, x_d)$  em  $V$  definem em  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  **coordenadas projetivas**  $[x_0 : x_1 : \dots : x_d]$ . Deste modo,  $[x_0 : x_1 : \dots : x_d] = [x'_0 : x'_1 : \dots : x'_d]$  se e só se  $x'_i = kx_i$  para todo  $i$  e algum  $k \in \mathbb{K}^\times$ .

O espaço projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^d$  é deste modo uma colagem de  $d + 1$  cópias do espaço afim  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^d$ . Por exemplo, colando duas cópias de  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1 = \mathbb{K}$  com coordenadas afins  $x_0, x_1$  e identificando  $\mathbb{K}^\times \subset (\mathbb{K}, x_0)$  e  $\mathbb{K}^\times \subset (\mathbb{K}, x_1)$  por meio da relação  $x_0 x_1 = 1$ , obtemos  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ .

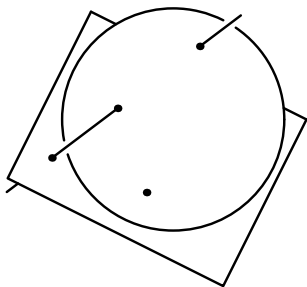
O espaço projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^d$  é deste modo uma colagem de  $d + 1$  cópias do espaço afim  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^d$ . Por exemplo, colando duas cópias de  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1 = \mathbb{K}$  com coordenadas afins  $x_0, x_1$  e identificando  $\mathbb{K}^\times \subset (\mathbb{K}, x_0)$  e  $\mathbb{K}^\times \subset (\mathbb{K}, x_1)$  por meio da relação  $x_0 x_1 = 1$ , obtemos  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ .

**Definição.** Denotamos por  $\mathbb{R}^{>0} := \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$  o grupo multiplicativo de números reais positivos. Seja  $V$  um espaço  $\mathbb{R}$ -linear  $(d + 1)$ -dimensional. O espaço  $\mathbb{S}^d := V^\times / \mathbb{R}^{>0}$  é a **esfera  $d$ -dimensional**. Caso  $V$  esteja munido de uma forma positivo-definida  $\langle -, - \rangle$ , podemos utilizar a definição usual  $\mathbb{S}^d := \{p \in V \mid \langle p, p \rangle = 1\}$  e definir o **espaço tangente** a  $\mathbb{S}^d$  no ponto  $p \in \mathbb{S}^d$  como sendo o subespaço  $\mathbb{R}$ -linear  $T_p \mathbb{S}^d = p^\perp := \{t \in V \mid \langle t, p \rangle = 0\} \leq V$ . Desta maneira, o hiperplano em  $V$  verdadeiramente tangente a  $\mathbb{S}^d$  tem a forma  $p^\perp + p$ . (Nos desenhos, será exibido este último.)



**Definição. A projeção estereográfica**

$\zeta_p : \mathbb{S}^n \setminus \{-p\} \rightarrow T_p \mathbb{S}^n$  manda o ponto  $q \in \mathbb{S}^n \setminus \{-p\}$  para a interseção  $L(-p, q) \cap T_p \mathbb{S}^n$ , onde  $L(-p, q)$  denota a reta que liga os pontos  $-p$  e  $q$ .



**Definição.** A **projeção estereográfica**

$\varsigma_p : \mathbb{S}^n \setminus \{-p\} \rightarrow T_p \mathbb{S}^n$  manda o ponto  $q \in \mathbb{S}^n \setminus \{-p\}$  para a interseção  $L(-p, q) \cap T_p \mathbb{S}^n$ , onde  $L(-p, q)$  denota a reta que liga os pontos  $-p$  e  $q$ .

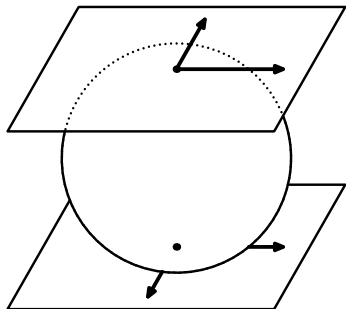
**Tarefa.** Prove que

$$\begin{aligned}\varsigma_p : \mathbb{S}^n \setminus \{-p\} \ni q &\mapsto \frac{q+p}{1+\langle q,p \rangle} - p \in T_p \mathbb{S}^n, \\ \varsigma_p^{-1} : T_p \mathbb{S}^n \ni t &\mapsto \frac{2(t+p)}{1+\langle t,t \rangle} - p \in \mathbb{S}^n \setminus \{-p\}.\end{aligned}$$

**Tarefa.** Prove que a projeção estereográfica estabelece uma correspondência biunívoca entre esferas em  $\mathbb{S}^d$  (= interseções de  $\mathbb{S}^d$  com espaços afins em  $V$ ) e esferas ou espaços afins em  $T_p \mathbb{S}^n$ .

**Tarefa.** Mostre que a projeção estereográfica preserva ângulos entre curvas.





É fácil demonstrar (diretamente ou através das fórmulas de projeção estereográfica) que a composição das duas projeções estereográficas no desenho identifica  $\mathbb{C}^\times$  em ambos os  $\mathbb{C}$ 's de acordo com a relação  $x_0 x_1 = 1$ . Para isto, basta observar que tal composição inverte o argumento e o módulo de um número complexo. Deste modo,  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  vira uma esfera bidimensional, chamada **esfera de Riemann**.

**Definição.** Fixemos espaços  $\mathbb{K}$ -lineares  $P, V$  de dimensão finita e denotemos por  $M := \{p \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(P, V) \mid \ker p = 0\}$  o subconjunto (aberto) do espaço  $\mathbb{K}$ -linear  $\text{Lin}_{\mathbb{K}}(P, V)$  formado por monomorfismos. O grupo  $\text{GL}_{\mathbb{K}} P$  de todas as transformações  $\mathbb{K}$ -lineares não-degeneradas do espaço  $P$  age à direita sobre  $\text{Lin}_{\mathbb{K}}(P, V)$  e sobre  $M$ . A **grassmanniana**  $\text{Gr}_{\mathbb{K}}(k, V)$  é o quociente

$$\text{Gr}_{\mathbb{K}}(k, V) := M/\text{GL}_{\mathbb{K}} P, \quad M \xrightarrow{\pi} M/\text{GL}_{\mathbb{K}} P,$$

onde  $k := \dim_{\mathbb{K}} P$ . Ela é o espaço de todos os subespaços  $\mathbb{K}$ -lineares  $k$ -dimensionais de  $V$ .

**Definição.** Fixemos espaços  $\mathbb{K}$ -lineares  $P, V$  de dimensão finita e denotemos por  $M := \{p \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(P, V) \mid \ker p = 0\}$  o subconjunto (aberto) do espaço  $\mathbb{K}$ -linear  $\text{Lin}_{\mathbb{K}}(P, V)$  formado por monomorfismos. O grupo  $\text{GL}_{\mathbb{K}} P$  de todas as transformações  $\mathbb{K}$ -lineares não-degeneradas do espaço  $P$  age à direita sobre  $\text{Lin}_{\mathbb{K}}(P, V)$  e sobre  $M$ . A **grassmanniana**  $\text{Gr}_{\mathbb{K}}(k, V)$  é o quociente

$$\text{Gr}_{\mathbb{K}}(k, V) := M/\text{GL}_{\mathbb{K}} P, \quad M \xrightarrow{\pi} M/\text{GL}_{\mathbb{K}} P,$$

onde  $k := \dim_{\mathbb{K}} P$ . Ela é o espaço de todos os subespaços  $\mathbb{K}$ -lineares  $k$ -dimensionais de  $V$ . No caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , tomando o grupo  $\text{GL}_{\mathbb{R}}^+ P := \{g \in \text{GL}_{\mathbb{R}} P \mid \det g > 0\}$  no lugar de  $\text{GL}_{\mathbb{K}} P$ , obtemos a **grassmanniana de subespaços  $\mathbb{R}$ -lineares  $k$ -dimensionais orientados de  $V$** ,

$$\text{Gr}_{\mathbb{R}}^+(k, V) := M/\text{GL}_{\mathbb{R}}^+ P, \quad M \xrightarrow{\pi'} M/\text{GL}_{\mathbb{R}}^+ P.$$

(As convenções anteriores sobre espaços projetivos serão utilizadas também para grassmannianas.)

**Definição.** Seja  $M$  um espaço topológico. Suponhamos que, para cada aberto  $U \subset \circ M$ , é dada uma  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathcal{F}(U)$  de funções do formato

$U \xrightarrow{f} \mathbb{K}$  tal que

- de  $W \subset \circ U \subset \circ M$  e  $f \in \mathcal{F}(U)$  segue  $f|_W \in \mathcal{F}(W)$ ;
- para qualquer função  $U \xrightarrow{f} \mathbb{K}$ , do fato que  $f|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$  para todo  $i \in I$ , segue que  $f \in \mathcal{F}(U)$ , onde  $U_i \subset \circ M$  e  $U := \bigcup_{i \in I} U_i$ .

$(M, \mathcal{F})$  se chama **espaço com feixe de funções  $\mathcal{F}$  com valores em  $\mathbb{K}$**  ou simplesmente **espaço com feixe (de funções)**.

**Definição.** Seja  $M$  um espaço topológico. Suponhamos que, para cada aberto  $U \subset \circ M$ , é dada uma  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathcal{F}(U)$  de funções do formato

$U \xrightarrow{f} \mathbb{K}$  tal que

- de  $W \subset \circ U \subset \circ M$  e  $f \in \mathcal{F}(U)$  segue  $f|_W \in \mathcal{F}(W)$ ;
- para qualquer função  $U \xrightarrow{f} \mathbb{K}$ , do fato que  $f|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$  para todo  $i \in I$ , segue que  $f \in \mathcal{F}(U)$ , onde  $U_i \subset \circ M$  e  $U := \bigcup_{i \in I} U_i$ .

$(M, \mathcal{F})$  se chama **espaço com feixe de funções  $\mathcal{F}$  com valores em  $\mathbb{K}$**  ou simplesmente **espaço com feixe (de funções)**.

Um **morfismo**  $(M_1, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\psi} (M_2, \mathcal{F}_2)$  entre espaços com feixes é uma aplicação contínua  $M_1 \xrightarrow{\psi} M_2$  tal que  $f_2 \circ \psi \in \mathcal{F}_1(\psi^{-1}(U_2))$  para todos  $U_2 \subset \circ M_2$  e  $f_2 \in \mathcal{F}_2(U_2)$ .

**Definição.** Seja  $M$  um espaço topológico. Suponhamos que, para cada aberto  $U \subset \circ M$ , é dada uma  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathcal{F}(U)$  de funções do formato

$U \xrightarrow{f} \mathbb{K}$  tal que

- de  $W \subset \circ U \subset \circ M$  e  $f \in \mathcal{F}(U)$  segue  $f|_W \in \mathcal{F}(W)$ ;
- para qualquer função  $U \xrightarrow{f} \mathbb{K}$ , do fato que  $f|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$  para todo  $i \in I$ , segue que  $f \in \mathcal{F}(U)$ , onde  $U_i \subset \circ M$  e  $U := \bigcup_{i \in I} U_i$ .

$(M, \mathcal{F})$  se chama **espaço com feixe de funções  $\mathcal{F}$  com valores em  $\mathbb{K}$**  ou simplesmente **espaço com feixe (de funções)**.

Um **morfismo**  $(M_1, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\psi} (M_2, \mathcal{F}_2)$  entre espaços com feixes é uma aplicação contínua  $M_1 \xrightarrow{\psi} M_2$  tal que  $f_2 \circ \psi \in \mathcal{F}_1(\psi^{-1}(U_2))$  para todos  $U_2 \subset \circ M_2$  e  $f_2 \in \mathcal{F}_2(U_2)$ .

O conceito de feixe expressa uma propriedade local de função.

Sejam  $(M_2, \mathcal{F}_2)$  um espaço com feixe e  $M \xrightarrow{\varphi} M_2$  uma aplicação arbitrária. Então existem a fraquíssima topologia (com a mínima família de conjuntos abertos) e o mínimo feixe  $\mathcal{F}$  sobre  $M$  tais que  $\varphi$  é um morfismo: os abertos em  $M$  têm a forma  $U = \varphi^{-1}(U_2)$ , onde  $U_2 \subset M_2$ , e a função

$M \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{K}$  pertence a  $\mathcal{F}(U)$  se localmente tem a forma  $f_2 \circ \varphi$ , i.e., se existem uma cobertura aberta  $U_2 = \bigcup_{i \in I} U_i$  e funções  $f_i \in \mathcal{F}_2(U_i)$  tais que

$U = \varphi^{-1}(U_2)$  e  $f|_{\varphi^{-1}(U_i)} = f_i \circ \varphi$  para todo  $i \in I$ .

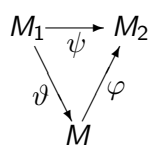
# Estrutura induzida

Sejam  $(M_2, \mathcal{F}_2)$  um espaço com feixe e  $M \xrightarrow{\varphi} M_2$  uma aplicação arbitrária. Então existem a fraquíssima topologia (com a mínima família de conjuntos abertos) e o mínimo feixe  $\mathcal{F}$  sobre  $M$  tais que  $\varphi$  é um morfismo: os abertos em  $M$  têm a forma  $U = \varphi^{-1}(U_2)$ , onde  $U_2 \subset M_2$ , e a função

$M \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{K}$  pertence a  $\mathcal{F}(U)$  se localmente tem a forma  $f_2 \circ \varphi$ , i.e., se existem uma cobertura aberta  $U_2 = \bigcup_{i \in I} U_i$  e funções  $f_i \in \mathcal{F}_2(U_i)$  tais que

$U = \varphi^{-1}(U_2)$  e  $f|_{\varphi^{-1}(U_i)} = f_i \circ \varphi$  para todo  $i \in I$ . Tal estrutura em  $M$  se chama **induzida**. Ela é universal: **se  $\psi = \varphi \circ \vartheta$  para alguns aplicação**

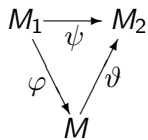
$M_1 \xrightarrow{\vartheta} M$  e morfismo  $(M_1, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\psi} (M_2, \mathcal{F}_2)$ , então  $\vartheta$  é um morfismo. Em subconjuntos  $M \subset M_2$  se pressupõe usualmente a estrutura induzida. Neste caso, ela se denota  $\mathcal{F}_2|_M$ . Caso  $M \subset M_2$ , a estrutura induzida é óbvia.





# Estrutura induzida e variedades

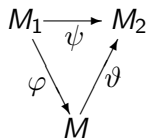
Sejam  $(M_1, \mathcal{F}_1)$  um espaço com feixe e  $M_1 \xrightarrow{\varphi} M$  uma aplicação arbitrária. Então existem a topologia fortíssima e o maior feixe  $\mathcal{F}$  sobre  $M$  tais que  $\varphi$  é um morfismo:  $U \subset M$  se  $\varphi^{-1}(U) \subset M_1$ ; a função  $M \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{K}$  pertence a  $\mathcal{F}(U)$  se  $f \circ \varphi \in \mathcal{F}_1(\varphi^{-1}(U))$ . Tal estrutura também se chama **indu-**



**zida**. Ela é universal: **se  $\psi = \vartheta \circ \varphi$  para alguns aplicação  $M \xrightarrow{\vartheta} M_2$  e morfismo  $(M_1, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\psi} (M_2, \mathcal{F}_2)$ , então  $\vartheta$  é um morfismo**. Essa é a estrutura que se pressupõe usualmente em quociente por equivalência  $\sim$ ,  $M_1 \rightarrow M := M_1 / \sim$ .

# Estrutura induzida e variedades

Sejam  $(M_1, \mathcal{F}_1)$  um espaço com feixe e  $M_1 \xrightarrow{\varphi} M$  uma aplicação arbitrária. Então existem a topologia fortíssima e o maior feixe  $\mathcal{F}$  sobre  $M$  tais que  $\varphi$  é um morfismo:  $U \subset \circ M$  se  $\varphi^{-1}(U) \subset \circ M_1$ ; a função  $M \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{K}$  pertence a  $\mathcal{F}(U)$  se  $f \circ \varphi \in \mathcal{F}_1(\varphi^{-1}(U))$ . Tal estrutura também se chama **indu-**

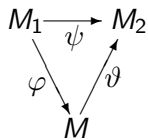


**zida**. Ela é universal: **se  $\psi = \vartheta \circ \varphi$  para alguns aplicação  $M \xrightarrow{\vartheta} M_2$  e morfismo  $(M_1, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\psi} (M_2, \mathcal{F}_2)$ , então  $\vartheta$  é um morfismo**. Essa é a estrutura que se pressupõe usualmente em quociente por equivalência  $\sim$ ,  $M_1 \rightarrow M := M_1 / \sim$ .

**Definição.** Um espaço topológico Hausdorff  $M$  com base enumerável para a topologia e feixe  $\mathcal{F}$  se chama **variedade suave** se é localmente isomorfo a subconjuntos abertos de espaços  $\mathbb{K}$ -lineares de dimensão finita munidos de seus feixes de funções  $C^\infty$ , i.e.,  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ ,  $U_i \subset \circ M$  e  $(U_i, \mathcal{F}|_{U_i}) \subset \circ (V_i, C^\infty)$ , onde os  $V_i$ 's são espaços  $\mathbb{K}$ -lineares de dimensão finita.

# Estrutura induzida e variedades

Sejam  $(M_1, \mathcal{F}_1)$  um espaço com feixe e  $M_1 \xrightarrow{\varphi} M$  uma aplicação arbitrária. Então existem a topologia fortíssima e o maior feixe  $\mathcal{F}$  sobre  $M$  tais que  $\varphi$  é um morfismo:  $U \subset \circ M$  se  $\varphi^{-1}(U) \subset \circ M_1$ ; a função  $M \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{K}$  pertence a  $\mathcal{F}(U)$  se  $f \circ \varphi \in \mathcal{F}_1(\varphi^{-1}(U))$ . Tal estrutura também se chama **indu-**



**zida**. Ela é universal: **se  $\psi = \vartheta \circ \varphi$  para alguns aplicação  $M \xrightarrow{\vartheta} M_2$  e morfismo  $(M_1, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\psi} (M_2, \mathcal{F}_2)$ , então  $\vartheta$  é um morfismo**. Essa é a estrutura que se pressupõe usualmente em quociente por equivalência  $\sim$ ,  $M_1 \rightarrow M := M_1 / \sim$ .

**Definição.** Um espaço topológico Hausdorff  $M$  com base enumerável para a topologia e feixe  $\mathcal{F}$  se chama **variedade suave** se é localmente isomorfo a subconjuntos abertos de espaços  $\mathbb{K}$ -lineares de dimensão finita munidos de seus feixes de funções  $C^\infty$ , i.e.,  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ ,  $U_i \subset \circ M$  e  $(U_i, \mathcal{F}|_{U_i}) \subset \circ (V_i, C^\infty)$ , onde os  $V_i$ 's são espaços  $\mathbb{K}$ -lineares de dimensão finita.

**Tarefa.** Verifique que espaços projetivos e esferas (e, mais geralmente, grassmannianas) são variedades suaves.

**Tarefa.** Prove que a esfera definida como subespaço é isomorfa (= **difeomorfa**) à esfera definida como quociente.

**Tarefa.** Prove que a esfera definida como subespaço é isomorfa (= **difeomorfa**) à esfera definida como quociente.

**Definição.** Um **vetor tangente**  $t$  à variedade  $M$  em um ponto  $p \in M$  é uma derivação com valores em  $\mathbb{K}$  de funções  $C^\infty$  definidas em  $p$ . Isso significa que, para toda função  $f \in C^\infty(U)$  com  $p \in U \subset M$ , é definido  $tf \in \mathbb{K}$  de modo que  $t(f|_W) = tf$  se  $p \in W \subset U$ . Além disso,  $t$  é  $\mathbb{K}$ -linear e satisfaz a regra de Leibniz  $t(f_1 f_2) = f_1(p)tf_2 + f_2(p)tf_1$ . Fixando um ponto  $p$ , todos os vetores tangentes formam um espaço  $\mathbb{K}$ -linear chamado **espaço tangente**  $T_p M$  a  $M$  em  $p \in M$ .

Intuitivamente, o vetor tangente é uma derivação das funções suaves na direção deste vetor:  $t_p f := \lim_{\mathbb{R} \ni \varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(p+\varepsilon t) - f(p)}{\varepsilon}$ .

**Tarefa.** Prove que a esfera definida como subespaço é isomorfa (= **difeomorfa**) à esfera definida como quociente.

**Definição.** Um **vetor tangente**  $t$  à variedade  $M$  em um ponto  $p \in M$  é uma derivação com valores em  $\mathbb{K}$  de funções  $C^\infty$  definidas em  $p$ . Isso significa que, para toda função  $f \in C^\infty(U)$  com  $p \in U \subset M$ , é definido  $tf \in \mathbb{K}$  de modo que  $t(f|_W) = tf$  se  $p \in W \subset U$ . Além disso,  $t$  é  $\mathbb{K}$ -linear e satisfaz a regra de Leibniz  $t(f_1 f_2) = f_1(p)tf_2 + f_2(p)tf_1$ . Fixando um ponto  $p$ , todos os vetores tangentes formam um espaço  $\mathbb{K}$ -linear chamado **espaço tangente**  $T_p M$  a  $M$  em  $p \in M$ .

Intuitivamente, o vetor tangente é uma derivação das funções suaves na direção deste vetor:  $t_p f := \lim_{\mathbb{R} \ni \varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(p+\varepsilon t) - f(p)}{\varepsilon}$ .

**Tarefa.** Seja  $V$  um espaço  $\mathbb{K}$ -linear de dimensão finita. Verifique que a fórmula  $t_p f = \lim_{\mathbb{R} \ni \varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(p+\varepsilon t) - f(p)}{\varepsilon}$  para  $p \in U \subset V$  e  $t \in V$  identifica os espaços  $\mathbb{R}$ -lineares  $T_p U = V$ .

**Tarefa.** Seja  $V$  um espaço  $\mathbb{K}$ -linear de dimensão finita e seja  $V^\times \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  a projeção. Verifique que a fórmula  $t_p f := \lim_{\mathbb{R} \ni \varepsilon \rightarrow 0} \frac{f \circ \pi(p + \varepsilon \hat{t} p) - f \circ \pi(p)}{\varepsilon}$ , onde  $\hat{t} \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V)$  é um levantamento arbitrário de  $t \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p)$ , estabelece uma identificação canônica  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V = \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p)$  de espaços  $\mathbb{R}$ -lineares. (A afirmação análoga vale para grassmannianas.)

**Tarefa.** Seja  $V$  um espaço  $\mathbb{K}$ -linear de dimensão finita e seja  $V^\times \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  a projeção. Verifique que a fórmula  $t_p f := \lim_{\mathbb{R} \ni \varepsilon \rightarrow 0} \frac{f \circ \pi(p + \varepsilon \hat{t} p) - f \circ \pi(p)}{\varepsilon}$ , onde  $\hat{t} \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V)$  é um levantamento arbitrário de  $t \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p)$ , estabelece uma identificação canônica  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V = \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p)$  de espaços  $\mathbb{R}$ -lineares. (A afirmação análoga vale para grassmannianas.)

**Observação.** Intuitivamente, o vetor tangente  $t \in T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  é “a velocidade de rotação (angular)” da reta  $L \subset V$  em torno do 0. Isto explica por que a identificação  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V = \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p)$  é mais adequada do que a identificação  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V = V/p$ : com reescolha de representante  $p \in L \subset V$ , o vetor  $\hat{t} p$  “perpendicular” à reta  $L$  estica-se correspondentemente.



A anteriormente mencionada identificação  $T_p \mathbb{S}^d = p^\perp \simeq V/p$  se explica pela existência de um representante canônico  $p \in V$  com  $\langle p, p \rangle = 1$ .



# Fibrado tangente

Seja  $M$  uma variedade suave. Definimos  $\mathbb{T}M := \bigsqcup_{p \in M} \mathbb{T}_p M$  com a óbvia

projeção  $\mathbb{T}M \xrightarrow{\pi} M$ . Por uma tarefa anterior, temos a identificação natural  $\mathbb{T}U = V \times U$  caso  $U \subset \circ V$ , onde  $V$  é um espaço  $\mathbb{K}$ -linear de dimensão finita. Isso permite definir a estrutura de variedade suave em  $\mathbb{T}M$  tal que  $\mathbb{T}M \xrightarrow{\pi} M$  é um morfismo (= **aplicação suave**). Em outras palavras,  $\mathbb{T}M \xrightarrow{\pi} M$  é o localmente trivial **fibrado tangente**.

# Fibrado tangente

Seja  $M$  uma variedade suave. Definimos  $\mathbb{T}M := \bigsqcup_{p \in M} \mathbb{T}_p M$  com a óbvia

projeção  $\mathbb{T}M \xrightarrow{\pi} M$ . Por uma tarefa anterior, temos a identificação natural  $\mathbb{T}U = V \times U$  caso  $U \subset \circ V$ , onde  $V$  é um espaço  $\mathbb{K}$ -linear de dimensão finita. Isso permite definir a estrutura de variedade suave em  $\mathbb{T}M$  tal que  $\mathbb{T}M \xrightarrow{\pi} M$  é um morfismo (= **aplicação suave**). Em outras palavras,  $\mathbb{T}M \xrightarrow{\pi} M$  é o localmente trivial **fibrado tangente**.

Para espaços e morfismos  $T_1 \xrightarrow{\pi_1} M \xleftarrow{\pi_2} T_2$ , definimos o **produto fibrado**  $T_1 \times_M T_2 \xrightarrow{\pi} M$  como sendo  $T_1 \times_M T_2 := \{(t_1, t_2) \in T_1 \times T_2 \mid \pi_1 t_1 = \pi_2 t_2\}$  com as estrutura induzida e óbvia projeção. (É útil imaginar  $T_1 \times_M T_2 \xrightarrow{\pi} M$  como a família parametrizada por  $M$  de produtos de fibras, i.e.,  $\pi^{-1}(p) = \pi_1^{-1}(p) \times \pi_2^{-1}(p)$  para todo  $p \in M$ .)

Claro que  $\mathbb{T}M \times_M \mathbb{T}M \rightarrow M$  é uma aplicação suave de variedades.

# Fibrado tangente

Seja  $M$  uma variedade suave. Definimos  $\mathbb{T}M := \bigsqcup_{p \in M} \mathbb{T}_p M$  com a óbvia

projeção  $\mathbb{T}M \xrightarrow{\pi} M$ . Por uma tarefa anterior, temos a identificação natural  $\mathbb{T}U = V \times U$  caso  $U \subset \circ V$ , onde  $V$  é um espaço  $\mathbb{K}$ -linear de dimensão finita. Isso permite definir a estrutura de variedade suave em  $\mathbb{T}M$  tal que  $\mathbb{T}M \xrightarrow{\pi} M$  é um morfismo (= **aplicação suave**). Em outras palavras,  $\mathbb{T}M \xrightarrow{\pi} M$  é o localmente trivial **fibrado tangente**.

Para espaços e morfismos  $T_1 \xrightarrow{\pi_1} M \xleftarrow{\pi_2} T_2$ , definimos o **produto fibrado**  $T_1 \times_M T_2 \xrightarrow{\pi} M$  como sendo  $T_1 \times_M T_2 := \{(t_1, t_2) \in T_1 \times T_2 \mid \pi_1 t_1 = \pi_2 t_2\}$  com as estrutura induzida e óbvia projeção. (É útil imaginar  $T_1 \times_M T_2 \xrightarrow{\pi} M$  como a família parametrizada por  $M$  de produtos de fibras, i.e.,  $\pi^{-1}(p) = \pi_1^{-1}(p) \times \pi_2^{-1}(p)$  para todo  $p \in M$ .)

Claro que  $\mathbb{T}M \times_M \mathbb{T}M \rightarrow M$  é uma aplicação suave de variedades.

**Tarefa.** Verifique que as operações  $+$  e  $\cdot$  são suaves em  $\mathbb{T}M$ , i.e., as aplicações  $\mathbb{T}M \times_M \mathbb{T}M \xrightarrow{+} \mathbb{T}M$ ,  $(t_1, t_2) \mapsto t_1 + t_2$ , e  $\mathbb{R} \times \mathbb{T}M \xrightarrow{\cdot} \mathbb{T}M$ ,  $(r, t) \mapsto r \cdot t$ , são suaves.

**Definição.** Seja  $]a, b[ \xrightarrow{c} M$  uma curva suave. O **vetor tangente**  $\dot{c}(s_0)$  à curva  $c$  no ponto  $c(s_0)$  é dado pela fórmula  $\dot{c}(s_0)f := \frac{d}{ds} \Big|_{s=s_0} f(c(s))$ .  
Obviamente,  $\dot{c}(s_0) \in T_{c(s_0)} M$ .

# Variedades (pseudo-)riemannianas

**Definição.** Seja  $]a, b[ \xrightarrow{c} M$  uma curva suave. O **vetor tangente**  $\dot{c}(s_0)$  à curva  $c$  no ponto  $c(s_0)$  é dado pela fórmula  $\dot{c}(s_0)f := \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=s_0} f(c(s))$ .

Obviamente,  $\dot{c}(s_0) \in T_{c(s_0)} M$ .

**Definição.** Suponhamos que, para cada ponto  $p \in M$ , o espaço  $\mathbb{R}$ -linear  $T_p M$  está munido de uma forma simétrica positivo-definida (não-degenerada)  $\langle -, - \rangle$  de modo que a aplicação  $T M \times_M T M \xrightarrow{\langle -, - \rangle} T M, (t_1, t_2) \mapsto \langle t_1, t_2 \rangle$ , é suave. Então  $M$  se chama **variedade riemanniana (pseudo-riemanniana)**.

# Variedades (pseudo-)riemannianas

**Definição.** Seja  $]a, b[ \xrightarrow{c} M$  uma curva suave. O **vetor tangente**  $\dot{c}(s_0)$  à curva  $c$  no ponto  $c(s_0)$  é dado pela fórmula  $\dot{c}(s_0)f := \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=s_0} f(c(s))$ . Obviamente,  $\dot{c}(s_0) \in T_{c(s_0)} M$ .

**Definição.** Suponhamos que, para cada ponto  $p \in M$ , o espaço  $\mathbb{R}$ -linear  $T_p M$  está munido de uma forma simétrica positivo-definida (não-degenerada)  $\langle -, - \rangle$  de modo que a aplicação  $T M \times_M T M \xrightarrow{\langle -, - \rangle} T M, (t_1, t_2) \mapsto \langle t_1, t_2 \rangle$ , é suave. Então  $M$  se chama **variedade riemanniana (pseudo-riemanniana)**.

O **funcional de comprimento** é dado pela fórmula

$$l_c := \int_a^b \sqrt{\langle \dot{c}(s), \dot{c}(s) \rangle} ds,$$

onde  $[a, b] \xrightarrow{c} M$  é uma aplicação suave por partes.

# Geometria não-euclidiana elementar

Fixamos um espaço  $\mathbb{K}$ -linear  $V$  de dimensão finita, munido de uma forma hermitiana  $\langle -, - \rangle$  não-degenerada, não necessariamente positivo-definida. O espaço projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  se quebra em três partes  $B V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \mid \langle p, p \rangle < 0\}$ ,  $E V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \mid \langle p, p \rangle > 0\}$  e  $S V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \mid \langle p, p \rangle = 0\}$  (a última se chama **o absoluto**) com respeito ao **sinal**  $-$ ,  $+$  ou  $0$  do ponto.

# Geometria não-euclidiana elementar

Fixamos um espaço  $\mathbb{K}$ -linear  $V$  de dimensão finita, munido de uma forma hermitiana  $\langle -, - \rangle$  não-degenerada, não necessariamente positivo-definida. O espaço projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  se quebra em três partes  $B V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \mid \langle p, p \rangle < 0\}$ ,  $E V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \mid \langle p, p \rangle > 0\}$  e  $S V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \mid \langle p, p \rangle = 0\}$  (a última se chama **o absoluto**) com respeito ao **sinal**  $-$ ,  $+$  ou  $0$  do ponto.

Para todo ponto  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \setminus S V$ , temos a decomposição ortogonal  $V = p \oplus p^{\perp}$ ,  $p^{\perp} := \{v \in V \mid \langle v, p \rangle = 0\}$ , e as correspondentes projeções ortogonais  $\pi'[p]$  e  $\pi[p]$ ,  $v = \pi'[p]v + \pi[p]v$ , dadas pelas fórmulas  $\pi'[p]v := \frac{\langle v, p \rangle}{\langle p, p \rangle} p$  e  $\pi[p]v := v - \frac{\langle v, p \rangle}{\langle p, p \rangle} p$ . Em particular, temos as identificações naturais  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V = \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, p^{\perp}) = \langle -, p \rangle p^{\perp}$ .



# Geometria não-euclidiana elementar

Fixamos um espaço  $\mathbb{K}$ -linear  $V$  de dimensão finita, munido de uma forma hermitiana  $\langle -, - \rangle$  não-degenerada, não necessariamente positivo-definida. O espaço projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  se quebra em três partes  $B V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \mid \langle p, p \rangle < 0\}$ ,  $E V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \mid \langle p, p \rangle > 0\}$  e  $S V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \mid \langle p, p \rangle = 0\}$  (a última se chama **o absoluto**) com respeito ao **sinal**  $-$ ,  $+$  ou  $0$  do ponto.

Para todo ponto  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \setminus S V$ , temos a decomposição ortogonal  $V = p \oplus p^\perp$ ,  $p^\perp := \{v \in V \mid \langle v, p \rangle = 0\}$ , e as correspondentes projeções ortogonais  $\pi'[p]$  e  $\pi[p]$ ,  $v = \pi'[p]v + \pi[p]v$ , dadas pelas fórmulas  $\pi'[p]v := \frac{\langle v, p \rangle}{\langle p, p \rangle} p$  e  $\pi[p]v := v - \frac{\langle v, p \rangle}{\langle p, p \rangle} p$ . Em particular, temos as identificações naturais  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V = \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, p^\perp) = \langle -, p \rangle p^\perp$ .

**Tarefa.** Sejam  $]a, b[ \xrightarrow{c} \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  uma curva suave e  $]a, b[ \xrightarrow{c_0} V$  um levantamento suave de  $c$  para  $V$ ,  $c(s) \notin S V$ . Mostre que o vetor tangente a curva  $c$  em  $c(s)$  corresponde a uma aplicação  $\mathbb{K}$ -linear  $\mathbb{K}c_0(s) \xrightarrow{\dot{c}(s)} c_0(s)^\perp$  tal que  $c_0(s) \mapsto \pi[c_0(s)] \dot{c}(s)$ .

**Definição.** Seja  $W \leq V$  um subespaço  $\mathbb{R}$ -linear bidimensional tal que a forma  $\langle -, - \rangle$  assume em  $W$  valores reais e não é identicamente nula,  $0 \neq \langle W, W \rangle \subset \mathbb{R}$ . A circunferência  $\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$  se chama **geodésica**. De acordo com a assinatura da forma  $\langle -, - \rangle$  restrita a  $W$ , a geodésica é: **esférica** quando a assinatura é **++ ou --**, **euclidiana** quando a assinatura é **+0 ou -0**, **hiperbólica** quando a assinatura é **+-**.

**Definição.** Seja  $W \leq V$  um subespaço  $\mathbb{R}$ -linear bidimensional tal que a forma  $\langle -, - \rangle$  assume em  $W$  valores reais e não é identicamente nula,  $0 \neq \langle W, W \rangle \subset \mathbb{R}$ . A circunferência  $\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$  se chama **geodésica**. De acordo com a assinatura da forma  $\langle -, - \rangle$  restrita a  $W$ , a geodésica é: **esférica** quando a assinatura é **++ ou --**, **euclidiana** quando a assinatura é **+0 ou -0**, **hiperbólica** quando a assinatura é **+ -**.

**Tarefa.** Note que, pelos pontos  $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ ,  $p_1 \neq p_2$ ,

- não passa nenhuma geodésica se  $p_1, p_2 \in S V$  e os pontos são **ortogonais**, i.e.,  $\langle p_1, p_2 \rangle = 0$ ;
- passa uma única geodésica se os pontos não são ortogonais ou se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e  $p_1 \notin S V$ ;
- passam infinitas geodésicas se os pontos são ortogonais,  $p_1 \notin S V$  e  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ; tais geodésicas estão na reta projetiva  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$  que liga  $p_1, p_2$  e qualquer geodésica contida em  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$  que passa por  $p_1$  necessariamente passa por  $p_2$ .

**Tarefa.** Seja  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \setminus S V$  e seja  $D \leq T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  um subespaço  $\mathbb{R}$ -linear unidimensional. Prove que existe uma única geodésica  $\Gamma$  que passa por  $p$  com vetor tangente em  $D$ . A afirmação é válida sem a hipótese  $p \notin S V$ ?

**Observação.** A geodésica  $\Gamma$  é esférica, euclidiana, hiperbólica quando a interseção  $S \cap V \cap \Gamma$  consiste de 0, 1, 2 pontos, respectivamente.

**Observação.** A geodésica  $\Gamma$  é esférica, euclidiana, hiperbólica quando a interseção  $S V \cap \Gamma$  consiste de 0, 1, 2 pontos, respectivamente.

**Definição.** Seja  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \setminus S V$  e sejam  $t_1, t_2 \in T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ , digamos,  $t_i = \langle -, p \rangle v_i$ , onde  $v_i \in p^\perp$ . Dependendo do **humor**  $\pm$ , definimos a **métrica (pseudo-)hermitiana em  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \setminus S V$**  pela fórmula

$$\langle t_1, t_2 \rangle := \pm \langle p, p \rangle \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Essa mesma definição funciona para grassmannianas:

$$\langle t_1, t_2 \rangle := \pm \operatorname{tr}(t_1 \circ t_2^*),$$

onde  $\operatorname{tr} t$  e  $t^*$  denotam traço e adjunto a  $t \in \operatorname{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$  na hipótese  $V = p + p^\perp$ , pois, neste caso,  $T_p \operatorname{Gr}_{\mathbb{K}}(k, V) = \operatorname{Lin}_{\mathbb{K}}(p, p^\perp) \leq \operatorname{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$ .

Sejam  $\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$  uma geodésica hiperbólica e  $p_1, p_2 \in \Gamma$  pontos do mesmo sinal  $\pm$ . Sendo  $S V \cap \Gamma = \{w_1, w_2\}$ , podemos permutar  $w_1$  e  $w_2$ , se necessário, e escolher certos representantes  $w_1, w_2, p_1, p_2 \in W$  e  $d \geq 0$  tais que  $\langle w_1, w_2 \rangle = \pm \frac{1}{2}$ ,  $p_1 = w_1 + w_2$  e  $p_2 = e^{-d} w_1 + e^d w_2$ . A aplicação  $[0, d] \xrightarrow{\gamma} \Gamma$ ,  $s \mapsto e^{-s} w_1 + e^s w_2$ , parametriza suavemente o segmento de geodésica entre  $p_1$  e  $p_2$  formado inteiramente por pontos do sinal  $\pm$ . (Note que  $\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle = \pm 1$ .) Aproveitando uma das tarefas anteriores, e estando no bom humor  $-$ , é fácil ver que  $\dot{\gamma}(s) = \pm \langle -, \gamma(s) \rangle (-e^{-s} w_1 + e^s w_2)$  e  $\langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \rangle = 1$ . Portanto, o comprimento do segmento  $\gamma$  da geodésica  $\Gamma$  é igual a  $l\gamma = \int_0^d \sqrt{\langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \rangle} ds = d$ . Em outras palavras, a parametrização de  $\gamma$  é **natural**.

## Comprimento de geodésica e tância

Sejam  $\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$  uma geodésica hiperbólica e  $p_1, p_2 \in \Gamma$  pontos do mesmo sinal  $\pm$ . Sendo  $S V \cap \Gamma = \{w_1, w_2\}$ , podemos permutar  $w_1$  e  $w_2$ , se necessário, e escolher certos representantes  $w_1, w_2, p_1, p_2 \in W$  e  $d \geq 0$  tais que  $\langle w_1, w_2 \rangle = \pm \frac{1}{2}$ ,  $p_1 = w_1 + w_2$  e  $p_2 = e^{-d} w_1 + e^d w_2$ . A aplicação

$[0, d] \xrightarrow{\gamma} \Gamma$ ,  $s \mapsto e^{-s} w_1 + e^s w_2$ , parametriza suavemente o segmento de geodésica entre  $p_1$  e  $p_2$  formado inteiramente por pontos do sinal  $\pm$ . (Note que  $\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle = \pm 1$ .) Aproveitando uma das tarefas anteriores, e estando no bom humor  $-$ , é fácil ver que  $\dot{\gamma}(s) = \pm \langle -, \gamma(s) \rangle (-e^{-s} w_1 + e^s w_2)$  e  $\langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \rangle = 1$ . Portanto, o comprimento do segmento  $\gamma$  da geodésica  $\Gamma$

é igual a  $l\gamma = \int_0^d \sqrt{\langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \rangle} ds = d$ . Em outras palavras, a parametrização de  $\gamma$  é **natural**. O resultado do cálculo exibido possui a forma invariante  $\cosh^2 d = \text{ta}(p_1, p_2)$ , onde  $\text{ta}(p_1, p_2) := \frac{\langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle \langle p_2, p_2 \rangle}$  é a **tância entre**

$p_1$  e  $p_2$  e  $\cosh s := \frac{e^{-s} + e^s}{2}$  é uma função crescente quando  $s \geq 0$ .

## Comprimento de geodésica e tância

Para uma geodésica esférica  $\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$  e pontos  $p_1, p_2 \in \Gamma$  de sinal  $\pm$ , temos uma parametrização natural  $[0, d] \xrightarrow{\gamma} \Gamma$ ,  $s \mapsto p_1 \cos s + q_1 \sin s$ , onde  $q_1 \in W \cap p_1^\perp$ ,  $\langle p_1, p_1 \rangle = \langle q_1, q_1 \rangle = \pm 1$ ,  $p_2 = p_1 \cos d + q_1 \sin d$  e  $d \in [0, \frac{\pi}{2}]$  para representantes apropriados  $p_1, p_2 \in W$ . De novo, estando de mau humor  $+$ , obtemos  $l\gamma = d$  e  $\cos^2 d = \text{ta}(p_1, p_2)$ , onde  $\cos s$  é uma função decrescente para  $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .



## Comprimento de geodésica e tância

Para uma geodésica esférica  $\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$  e pontos  $p_1, p_2 \in \Gamma$  de sinal  $\pm$ , temos uma parametrização natural  $[0, d] \xrightarrow{\gamma} \Gamma$ ,  $s \mapsto p_1 \cos s + q_1 \sin s$ , onde  $q_1 \in W \cap p_1^\perp$ ,  $\langle p_1, p_1 \rangle = \langle q_1, q_1 \rangle = \pm 1$ ,  $p_2 = p_1 \cos d + q_1 \sin d$  e  $d \in [0, \frac{\pi}{2}]$  para representantes apropriados  $p_1, p_2 \in W$ . De novo, estando de mau humor  $+$ , obtemos  $\ell\gamma = d$  e  $\cos^2 d = \text{ta}(p_1, p_2)$ , onde  $\cos s$  é uma função decrescente para  $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

No caso de uma geodésica hiperbólica, a semelhante parametrização  $\gamma(s) := p_1 \cosh s + q_1 \sinh s$  também funciona.

## Comprimento de geodésica e tância

Para uma geodésica esférica  $\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$  e pontos  $p_1, p_2 \in \Gamma$  de sinal  $\pm$ , temos uma parametrização natural  $[0, d] \xrightarrow{\gamma} \Gamma$ ,  $s \mapsto p_1 \cos s + q_1 \sin s$ , onde  $q_1 \in W \cap p_1^\perp$ ,  $\langle p_1, p_1 \rangle = \langle q_1, q_1 \rangle = \pm 1$ ,  $p_2 = p_1 \cos d + q_1 \sin d$  e  $d \in [0, \frac{\pi}{2}]$  para representantes apropriados  $p_1, p_2 \in W$ . De novo, estando de mau humor  $+$ , obtemos  $\ell\gamma = d$  e  $\cos^2 d = \text{ta}(p_1, p_2)$ , onde  $\cos s$  é uma função decrescente para  $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

No caso de uma geodésica hiperbólica, a semelhante parametrização  $\gamma(s) := p_1 \cosh s + q_1 \sinh s$  também funciona.

**Observação.** Apesar que geodésicas euclidianas têm comprimento nulo, elas também possuem parametrizações naturais: sejam  $\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$  uma geodésica euclidiana e  $p_1, p_2 \in \Gamma \setminus S V$ . Escolhemos representantes  $p_1, p_2 \in W$  tais que  $\langle p_1, p_1 \rangle = \langle p_2, p_2 \rangle$ . Então  $[0, 1] \xrightarrow{\gamma} \Gamma$ ,  $s \mapsto p_1 s + p_2(1 - s)$ , é uma parametrização natural do segmento de geodésica  $\Gamma$  que liga  $p_1, p_2$  e não contém o ponto do absoluto (humor arbitrário).

## Comprimento de geodésica e tância

Para uma geodésica esférica  $\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$  e pontos  $p_1, p_2 \in \Gamma$  de sinal  $\pm$ , temos uma parametrização natural  $[0, d] \xrightarrow{\gamma} \Gamma$ ,  $s \mapsto p_1 \cos s + q_1 \sin s$ , onde  $q_1 \in W \cap p_1^\perp$ ,  $\langle p_1, p_1 \rangle = \langle q_1, q_1 \rangle = \pm 1$ ,  $p_2 = p_1 \cos d + q_1 \sin d$  e  $d \in [0, \frac{\pi}{2}]$  para representantes apropriados  $p_1, p_2 \in W$ . De novo, estando de mau humor  $+$ , obtemos  $\ell\gamma = d$  e  $\cos^2 d = \text{ta}(p_1, p_2)$ , onde  $\cos s$  é uma função decrescente para  $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

No caso de uma geodésica hiperbólica, a semelhante parametrização  $\gamma(s) := p_1 \cosh s + q_1 \sinh s$  também funciona.

**Observação.** Apesar que geodésicas euclidianas têm comprimento nulo, elas também possuem parametrizações naturais: sejam  $\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$  uma geodésica euclidiana e  $p_1, p_2 \in \Gamma \setminus S V$ . Escolhemos representantes  $p_1, p_2 \in W$  tais que  $\langle p_1, p_1 \rangle = \langle p_2, p_2 \rangle$ . Então  $[0, 1] \xrightarrow{\gamma} \Gamma$ ,  $s \mapsto p_1 s + p_2(1 - s)$ , é uma parametrização natural do segmento de geodésica  $\Gamma$  que liga  $p_1, p_2$  e não contém o ponto do absoluto (humor arbitrário).

**Moral.** É mais apropriado medir, não a distância, mas a tância, pois a última é primária, mais simples (algébrica) e, além disso, pode ser utilizada para pontos de sinais diferentes.

# Exemplos

1. Para  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , a forma  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $++$  e humor  $+$ , obtemos a esfera de Riemann “redonda”  $S V = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  de raio  $\frac{1}{2}$ .

## Exemplos

1. Para  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , a forma  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $++$  e humor  $+$ , obtemos a esfera de Riemann “redonda”  $S V = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  de raio  $\frac{1}{2}$ .
2. Para  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , a forma  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $+ -$  e humor  $-$ , obtemos a **esfera de Riemann-Poincaré**  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  cortada pelo absoluto (equador)  $S V$  em dois **discos de Poincaré**  $B V$  e  $E V$ .

Com uso da projeção estereográfica, podemos identificar cada disco com o disco unitário no plano  $\mathbb{C}$  : a isometria entre  $B V$  e  $E V$  é dada pela **dualidade**  $p \mapsto p^{\perp}$ .

# Exemplos

1. Para  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , a forma  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $++$  e humor  $+$ , obtemos a esfera de Riemann “redonda”  $S V = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  de raio  $\frac{1}{2}$ .
2. Para  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , a forma  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $+ -$  e humor  $-$ , obtemos a **esfera de Riemann-Poincaré**  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  cortada pelo absoluto (equador)  $S V$  em dois **discos de Poincaré**  $B V$  e  $E V$ .

Com uso da projeção estereográfica, podemos identificar cada disco com o disco unitário no plano  $\mathbb{C}$ : a isometria entre  $B V$  e  $E V$  é dada pela **dualidade**  $p \mapsto p^\perp$ .

No esboço com duas projeções estereográficas da esfera de Riemann, o absoluto pode ser visto como o equador que está no plano horizontal. Então os pontos duais estão em uma mesma reta vertical. Sendo fechadas relativamente a tomar-se pontos duais, as geodésicas são interseções da esfera  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  com planos “verticais”. Portanto, geodésicas são “ortogonais” ao absoluto. Pelas propriedades da projeção estereográfica, as geodésicas no disco unitário em  $\mathbb{C}$  são circunferências ortogonais à circunferência unitária ou diâmetros.

A métrica hermitiana é positivo-definida em  $B V$  e  $E V$ .

3. Para  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , a forma  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $++-$  e o humor  $-$ , obtemos o **plano projetivo real de Möbius-Beltrami-Klein-Lorentz**  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ , cortado pelo absoluto  $S V$  no **disco de Beltrami-Klein**  $B V$  e na **fita de Möbius-Lorentz**  $E V$ .

De fato, escolhendo em  $V$  uma base ortonormal de assinatura  $-++$ , temos coordenadas projetivas  $[x_0:x_1:x_2]$  em termos das quais  $B V = \{ [1:x_1:x_2] \mid x_1^2 + x_2^2 < 1 \}$  é o disco unitário  $\mathbb{D}$  no plano afim. Chegamos exatamente àquele desenho com ajuda do qual entendemos que o plano projetivo real  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  é colado dos disco e fita de Möbius.

3. Para  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , a forma  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $++-$  e o humor  $-$ , obtemos o **plano projetivo real de Möbius-Beltrami-Klein-Lorentz**  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ , cortado pelo absoluto  $S V$  no **disco de Beltrami-Klein**  $B V$  e na **fita de Möbius-Lorentz**  $E V$ .

De fato, escolhendo em  $V$  uma base ortonormal de assinatura  $-++$ , temos coordenadas projetivas  $[x_0:x_1:x_2]$  em termos das quais  $B V = \{ [1:x_1:x_2] \mid x_1^2 + x_2^2 < 1 \}$  é o disco unitário  $\mathbb{D}$  no plano afim. Chegamos exatamente àquele desenho com ajuda do qual entendemos que o plano projetivo real  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  é colado dos disco e fita de Möbius.

Geodésicas são exatamente retas (projetivas) em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ . Uma geodésica é hiperbólica se intercepta o disco unitário  $\mathbb{D}$  por uma corda; é euclidiana se é tangente ao absoluto  $S V$ ; é esférica se está inteiramente contida em  $E V$ .



3. Para  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , a forma  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $++-$  e o humor  $-$ , obtemos o **plano projetivo real de Möbius-Beltrami-Klein-Lorentz**  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ , cortado pelo absoluto  $S V$  no **disco de Beltrami-Klein**  $B V$  e na **fita de Möbius-Lorentz**  $E V$ .

De fato, escolhendo em  $V$  uma base ortonormal de assinatura  $-++$ , temos coordenadas projetivas  $[x_0:x_1:x_2]$  em termos das quais  $B V = \{ [1:x_1:x_2] \mid x_1^2 + x_2^2 < 1 \}$  é o disco unitário  $\mathbb{D}$  no plano afim. Chegamos exatamente àquele desenho com ajuda do qual entendemos que o plano projetivo real  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  é colado dos disco e fita de Möbius.

Geodésicas são exatamente retas (projetivas) em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ . Uma geodésica é hiperbólica se intercepta o disco unitário  $\mathbb{D}$  por uma corda; é euclidiana se é tangente ao absoluto  $S V$ ; é esférica se está inteiramente contida em  $E V$ .

Nessa vez, a **dualidade**  $p \mapsto p^\perp$  transforma pontos em geodésicas (e vice-versa): pontos positivos correspondem às geodésicas hiperbólicas, negativos às esféricas e geodésicas euclidianas correspondem aos pontos do absoluto (seus pontos de tangência com o absoluto).

# Exemplos

Em particular, isto significa que  $E V$  é o espaço de geodésicas que passam pelo disco  $B V$ . (Sendo, de fato, tal geodésica um par não-ordenado de pontos no absoluto, resolvemos uma das tarefas anteriores.)

Em particular, isto significa que  $E V$  é o espaço de geodésicas que passam pelo disco  $B V$ . (Sendo, de fato, tal geodésica um par não-ordenado de pontos no absoluto, resolvemos uma das tarefas anteriores.)

A métrica é positivo-definida no disco  $B V$  e, na fita  $E V$ , tem assinatura  $+ -$ , i.e.,  $E V$  é uma **variedade lorentziana**. A **geometria lorentziana** é bem apropriada ao espaço de geodésicas: entre geodésicas disjuntas em  $B V$  temos distância; entre as que se interceptam em  $B V$ , ângulo.

Em particular, isto significa que  $E V$  é o espaço de geodésicas que passam pelo disco  $B V$ . (Sendo, de fato, tal geodésica um par não-ordenado de pontos no absoluto, resolvemos uma das tarefas anteriores.)

A métrica é positivo-definida no disco  $B V$  e, na fita  $E V$ , tem assinatura  $+-$ , i.e.,  $E V$  é uma **variedade lorentziana**. A **geometria lorentziana** é bem apropriada ao espaço de geodésicas: entre geodésicas disjuntas em  $B V$  temos distância; entre as que se interceptam em  $B V$ , ângulo.

**Tarefa.** Mostre que a aplicação  $z \mapsto \frac{2z}{1+|z|^2}$  providencia uma isometria (a menos de um fator constante) entre o disco unitário em  $\mathbb{C}$  e o disco unitário  $\mathbb{D}$  no plano afim.

**Tarefa.\*** Resolva a tarefa anterior sem uso de coordenadas.

Em particular, isto significa que  $E V$  é o espaço de geodésicas que passam pelo disco  $B V$ . (Sendo, de fato, tal geodésica um par não-ordenado de pontos no absoluto, resolvemos uma das tarefas anteriores.)

A métrica é positivo-definida no disco  $B V$  e, na fita  $E V$ , tem assinatura  $+-$ , i.e.,  $E V$  é uma **variedade lorentziana**. A **geometria lorentziana** é bem apropriada ao espaço de geodésicas: entre geodésicas disjuntas em  $B V$  temos distância; entre as que se interceptam em  $B V$ , ângulo.

**Tarefa.** Mostre que a aplicação  $z \mapsto \frac{2z}{1+|z|^2}$  providencia uma isometria (a menos de um fator constante) entre o disco unitário em  $\mathbb{C}$  e o disco unitário  $\mathbb{D}$  no plano afim.

**Tarefa.\*** Resolva a tarefa anterior sem uso de coordenadas.

**4.** Para  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , a forma  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $+\cdots+$  e humor  $+$ , obtemos o espaço projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$  munido da **métrica hermitiana de Fubini-Study**.

5. Para  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , a forma  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $++-$  e humor  $-$ , o absoluto  $S V$  é uma 3-esfera com a **estrutura CR** natural. Isto significa que no fibrado tangente  $T S V$  é indicada uma **distribuição de contato** formada por subespaços  $\mathbb{C}$ -lineares  $D_p \leq T_p S V$ ,  $\dim_{\mathbb{C}} D_p = 1$ , e suave em  $p \in S V$ . Mais precisamente,  $D_p := T_p S V \cap i T_p S V$ . (Em variedades de dimensão ímpar, a estrutura CR faz o papel da complexa.) O absoluto  $S V$  limita no plano projetivo complexo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$  a **2-bola holomorfa  $B V$**  (= bola quadridimensional real com estrutura complexa integrável) munida da **geometria hiperbólica complexa**, i.e., da correspondente métrica hermitiana.

A métrica (pseudo)hermitiana tem assinatura  $++$  e  $+-$  em  $B V$  e  $E V$ , respectivamente.

5. Para  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , a forma  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $++-$  e humor  $-$ , o absoluto  $S V$  é uma 3-esfera com a **estrutura CR** natural. Isto significa que no fibrado tangente  $T S V$  é indicada uma **distribuição de contato** formada por subespaços  $\mathbb{C}$ -lineares  $D_p \leq T_p S V$ ,  $\dim_{\mathbb{C}} D_p = 1$ , e suave em  $p \in S V$ . Mais precisamente,  $D_p := T_p S V \cap i T_p S V$ . (Em variedades de dimensão ímpar, a estrutura CR faz o papel da complexa.) O absoluto  $S V$  limita no plano projetivo complexo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$  a **2-bola holomorfa**  $B V$  (= bola quadridimensional real com estrutura complexa integrável) munida da **geometria hiperbólica complexa**, i.e., da correspondente métrica hermitiana.

A métrica (pseudo)hermitiana tem assinatura  $++$  e  $+-$  em  $B V$  e  $E V$ , respectivamente.

Cada geodésica  $\Gamma$  gera uma reta projetiva  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$  tal que  $\Gamma \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . A reta  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  é a esfera “redonda” (exemplo 1) no caso de  $\Gamma$  esférica e é a esfera de Riemann-Poincaré (exemplo 2) no caso de  $\Gamma$  hiperbólica. Portanto, a geometria esférica se deforma na hiperbólica e, “pelo caminho”, encontramos a **reta projetiva euclidiana**  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} W$ , onde  $W \leq V$  é um subespaço  $\mathbb{C}$ -linear

## Exemplos

de assinatura  $+0$ . Claramente,  $S V \cap \mathbb{P}_{\mathbb{C}} W$  é um ponto. Denotando-o por  $\infty$ , é fácil ver que toda geodésica  $\Gamma \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}} W$  passa por  $\infty$  e as geodésicas em  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} W \setminus \{\infty\}$  se comportam exatamente como retas no plano afim real. (Assim, ao invés de euclidiana, é mais apropriado chamar  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} W$  de **reta projetiva afim**.) A **dualidade**  $p \mapsto p^{\perp}$  define uma bijeção entre pontos  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$  e retas projetivas. Aos pontos  $p \in B V$ ,  $p \in E V$  e  $p \in S V$  correspondem, respectivamente, as retas projetivas esférica, hiperbólica e euclidiana  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} p^{\perp}$ .

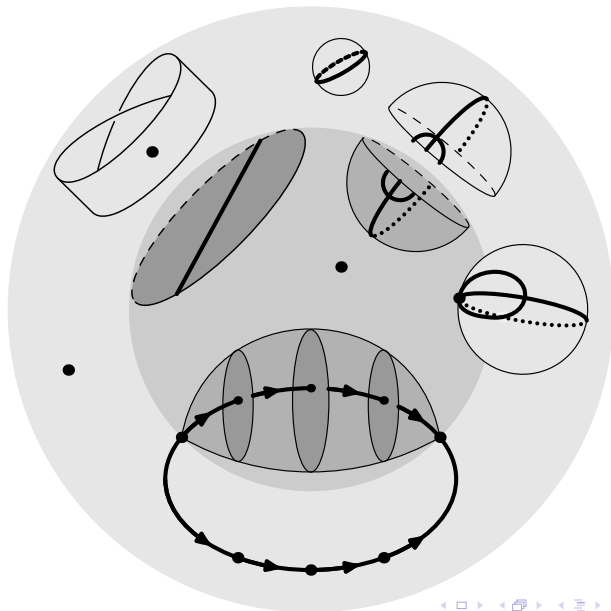


## Exemplos

de assinatura  $+0$ . Claramente,  $S V \cap \mathbb{P}_{\mathbb{C}} W$  é um ponto. Denotando-o por  $\infty$ , é fácil ver que toda geodésica  $\Gamma \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}} W$  passa por  $\infty$  e as geodésicas em  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} W \setminus \{\infty\}$  se comportam exatamente como retas no plano afim real. (Assim, ao invés de euclidiana, é mais apropriado chamar  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} W$  de **reta projetiva afim**.) A **dualidade**  $p \mapsto p^{\perp}$  define uma bijeção entre pontos  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$  e retas projetivas. Aos pontos  $p \in B V$ ,  $p \in E V$  e  $p \in S V$  correspondem, respectivamente, as retas projetivas esférica, hiperbólica e euclidiana  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} p^{\perp}$ .

Seja  $V_0 \leq V$  um subespaço  $\mathbb{R}$ -linear tridimensional tal que  $\langle V_0, V_0 \rangle \subset \mathbb{R}$  e  $V = V_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ . Então,  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V_0$  é o plano projetivo real de Möbius-Beltrami-Klein-Lorentz (exemplo 3) chamado  **$\mathbb{R}$ -plano**. Uma subvariedade  $N \subset M$  da variedade pseudo-Riemanniana  $M$  é dita **totalmente geodésica** se, junto com qualquer par de pontos distintos  $p_1, p_2 \in N$ , a subvariedade  $N$  contém uma geodésica  $\Gamma$  que liga  $p_1, p_2$ , i.e.,  $p_1, p_2 \in \Gamma \subset N$ . É possível provar que as superfícies totalmente geodésicas em  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$  são apenas as retas projetivas  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  e os  $\mathbb{R}$ -planos  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V_0$  e que em  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$  não há subvariedades totalmente geodésicas de codimensão real 1.

# Zoológico hiperbólico complexo (exemplo 5)



6. Para  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , a forma  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $+++ -$  e humor  $-$ , a métrica na 3-bola  $B V$ , chamada **espaço hiperbólico real**, tem assinatura  $+++$ , enquanto  $E V$  é o lorentziano (assinatura  $++ -$ ) **espaço de de Sitter**, utilizado na teoria da Relatividade Geral. Há uma óbvia dualidade entre geodésicas esféricas e hiperbólicas em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}} V$ .

6. Para  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , a forma  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $+++ -$  e humor  $-$ , a métrica na 3-bola  $B V$ , chamada **espaço hiperbólico real**, tem assinatura  $+++$ , enquanto  $E V$  é o lorentziano (assinatura  $++ -$ ) **espaço de de Sitter**, utilizado na teoria da Relatividade Geral. Há uma óbvia dualidade entre geodésicas esféricas e hiperbólicas em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}} V$ .

**Tarefa.** Verifique, acuradamente, todos os detalhes dos exemplos apresentados.

Você pode precisar da seguinte

**Tarefa.\*** Sejam  $W \leq V$  um subespaço  $\mathbb{R}$ -linear e  $p \in W$ . Se  $\min_{0 \neq w \in W} \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}w \cap W) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}p \cap W)$ , o ponto  $p \in W$  é dito **projetivamente suave em  $W$** . Denotamos por  $S \subset W$  o conjunto de todos os pontos projetivamente suaves em  $W$ . Prove que  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} S \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  é subvariedade suave e que o vetor tangente  $t \in T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V = \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p)$  no ponto  $p \in S$  pertence a  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$  se e só se  $tp \in W + \mathbb{K}p$ .

# Grupo de isometrias e matriz de Gram

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{d\varphi} & TN \\ \downarrow \pi_M & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

**Definição.** O **diferencial**  $TM \xrightarrow{d\varphi} TN$  da aplicação suave  $M \xrightarrow{\varphi} N$  é  $\mathbb{K}$ -linear em **fibras**  $T_p M \xrightarrow{d_p\varphi} T_{\varphi p} N$  pois é dado pela fórmula  $((d_p\varphi)t)f := t(f \circ \varphi)$ . Obviamente,  $d\varphi$  é uma aplicação suave. Às vezes, vamos escrever  $\varphi$  no lugar de  $d\varphi$ .

$$\begin{array}{ccc} T M & \xrightarrow{d\varphi} & T N \\ \downarrow \pi_M & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$
**Definição.** O **diferencial**  $T M \xrightarrow{d\varphi} T N$  da aplicação suave  $M \xrightarrow{\varphi} N$  é  $\mathbb{K}$ -linear em **fibras**  $T_p M \xrightarrow{d_p\varphi} T_{\varphi p} N$  pois é dado pela fórmula  $((d_p\varphi)t)f := t(f \circ \varphi)$ . Obviamente,  $d\varphi$  é uma aplicação suave. Às vezes, vamos escrever  $\varphi$  no lugar de  $d\varphi$ .

Em termos da identificação  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V = \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p)$ , o diferencial  $\text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p) \xrightarrow{d_p g} \text{Lin}_{\mathbb{K}}(gp, V/gp)$  da aplicação  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \xrightarrow{g} \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  induzida por  $g \in GL_{\mathbb{K}} V$  tem a forma  $t \mapsto g \circ t \circ g^{-1}$  (para grassmannianas,  $t \mapsto g \circ t$ ). Identificando  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V = \langle -, p \rangle p^{\perp}$  para  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \setminus S V$  e  $v \in p^{\perp}$ , temos  $\langle -, p \rangle v \xrightarrow{d_p g} \langle -, gp \rangle \pi[gp](gv)$ .

# Grupo de isometrias e matriz de Gram

$T M \xrightarrow{d\varphi} T N$  **Definição.** O **diferencial**  $T M \xrightarrow{d\varphi} T N$  da aplicação suave  
 $\begin{array}{ccc} T M & \xrightarrow{d\varphi} & T N \\ \downarrow \pi_M & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$   $M \xrightarrow{\varphi} N$  é  $\mathbb{K}$ -linear em **fibras**  $T_p M \xrightarrow{d_p\varphi} T_{\varphi p} N$  pois é dado  
pela fórmula  $((d_p\varphi)t)f := t(f \circ \varphi)$ . Obviamente,  $d\varphi$  é  
uma aplicação suave. Às vezes, vamos escrever  $\varphi$  no lugar de  $d\varphi$ .

Em termos da identificação  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V = \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p)$ , o diferencial  
 $\text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p) \xrightarrow{d_p g} \text{Lin}_{\mathbb{K}}(gp, V/gp)$  da aplicação  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \xrightarrow{g} \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  induzida  
por  $g \in \text{GL}_{\mathbb{K}} V$  tem a forma  $t \mapsto g \circ t \circ g^{-1}$  (para grassmannianas,  
 $t \mapsto g \circ t$ ). Identificando  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V = \langle -, p \rangle p^{\perp}$  para  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \setminus S V$  e  
 $v \in p^{\perp}$ , temos  $\langle -, p \rangle v \xrightarrow{d_p g} \langle -, gp \rangle \pi[gp](gv)$ .

Em particular, se  $g \in U V := \{g \in \text{GL}_{\mathbb{K}} V \mid \langle gv_1, gv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \text{ para todos } v_1, v_2 \in V\}$ , o diferencial  $d_p g$  **preserva a métrica (pseudo)hermitiana**. Em outras palavras, **o grupo  $U V$  age sobre  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  por isometrias**.  
No caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , o grupo  $U V$  é dito **unitário**. No caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , ele se chama **ortogonal** e é denotado por  $O V$ . Claramente, o **grupo  $U V$  preserva a tância**.

# Grupo de isometrias e matriz de Gram

No caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , há outras isometrias. Por exemplo, se  $V_0 \leq V$  é um subespaço  $\mathbb{R}$ -linear tal que  $\langle V_0, V_0 \rangle \subset \mathbb{R}$  e  $V = V_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ , a conjugação complexa em  $\mathbb{C}$  induz uma involução semi-linear  $V \xrightarrow{\sigma} V$  e a correspondente involução  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$ .

A involução  $\sigma$  preserva a tância pois  $\langle \sigma v_1, \sigma v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$  para todos  $v_1, v_2 \in V$ . Além disso,  $\langle \sigma t_1, \sigma t_2 \rangle = \langle t_2, t_1 \rangle$  para todos  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$  e  $t_1, t_2 \in T_p \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$ . É fácil ver que  $\sigma(U V)\sigma = U V$ . Adicionando  $\sigma$  a  $U V$ , obtemos o **grupo unitário estendido**  $\widehat{U} V$ . O resultado  $\widehat{U} V$  não depende da escolha de  $\sigma$ , pois todos tais  $\sigma$ 's são conjugados por elementos de  $U V$  e  $U V \leq \widehat{U} V$  é um subgrupo normal de índice 2. (Por definição,  $\widehat{O} V := O V$  no caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .)

A multiplicação  $V \xrightarrow{k} V$  por  $k \in \mathbb{K}$  tal que  $|k| = 1$  age trivialmente no nível de  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ . Portanto, o grupo quociente  $\widehat{P} U V$  do grupo  $\widehat{U} V$  pelo subgrupo normal de tais multiplicações, chamado o **grupo unitário projetivo estendido** (respectivamente, **grupo ortogonal projetivo**), age sobre  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  por isometrias.



# Grupo de isometrias e matriz de Gram

**Definição.** A **matriz de Gram**  $[g_{ij}]$  da coleção  $p_1, \dots, p_n \in V$  tem coeficientes  $g_{ij} := \langle p_i, p_j \rangle$ .

# Grupo de isometrias e matriz de Gram

**Definição.** A **matriz de Gram**  $[g_{ij}]$  da coleção  $p_1, \dots, p_n \in V$  tem coeficientes  $g_{ij} := \langle p_i, p_j \rangle$ .

**Lema.** *Suponhamos que as coleções  $p_1, \dots, p_n \in V$  e  $p'_1, \dots, p'_n \in V$  geram subespaços  $\mathbb{K}$ -lineares não-degenerados. Então, para a existência de  $g \in \cup V$  tal que  $gp_i = p'_i$  para todo  $i$ , é necessário e suficiente que as matrizes de Gram das coleções coincidam.*

# Grupo de isometrias e matriz de Gram

**Definição.** A **matriz de Gram**  $[g_{ij}]$  da coleção  $p_1, \dots, p_n \in V$  tem coeficientes  $g_{ij} := \langle p_i, p_j \rangle$ .

**Lema.** *Suponhamos que as coleções  $p_1, \dots, p_n \in V$  e  $p'_1, \dots, p'_n \in V$  geram subespaços  $\mathbb{K}$ -lineares não-degenerados. Então, para a existência de  $g \in \text{U} V$  tal que  $gp_i = p'_i$  para todo  $i$ , é necessário e suficiente que as matrizes de Gram das coleções coincidam.*

**Tarefa.** Prove o lema.

**Tarefa.\*\*** Formule e prove o lema sem a hipótese de não-degenerescência.

# Grupo de isometrias e matriz de Gram

**Definição.** A **matriz de Gram**  $[g_{ij}]$  da coleção  $p_1, \dots, p_n \in V$  tem coeficientes  $g_{ij} := \langle p_i, p_j \rangle$ .

**Lema.** *Suponhamos que as coleções  $p_1, \dots, p_n \in V$  e  $p'_1, \dots, p'_n \in V$  geram subespaços  $\mathbb{K}$ -lineares não-degenerados. Então, para a existência de  $g \in \text{U} V$  tal que  $gp_i = p'_i$  para todo  $i$ , é necessário e suficiente que as matrizes de Gram das coleções coincidam.*

**Tarefa.** Prove o lema.

**Tarefa.\*\*** Formule e prove o lema sem a hipótese de não-degenerescência.

**Corolário.** *Suponhamos que as coleções  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  e  $p'_1, \dots, p'_n \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  geram subespaços  $\mathbb{K}$ -lineares não-degenerados. Para que as coleções sejam **PU V-congruentes**, i.e., para a existência de isometria  $g \in \text{PU} V$  tal que  $gp_i = p'_i$  para todo  $i$ , é necessário e suficiente que as matrizes de Gram  $G, G'$  destas coleções sejam **equivalentes**, i.e., que  $DG\bar{D} = G'$  para uma apropriada matriz diagonal não-degenerada  $D$  ■*

# Grupo de isometrias e matriz de Gram

**Definição.** A **matriz de Gram**  $[g_{ij}]$  da coleção  $p_1, \dots, p_n \in V$  tem coeficientes  $g_{ij} := \langle p_i, p_j \rangle$ .

**Lema.** Suponhamos que as coleções  $p_1, \dots, p_n \in V$  e  $p'_1, \dots, p'_n \in V$  geram subespaços  $\mathbb{K}$ -lineares não-degenerados. Então, para a existência de  $g \in \text{U} V$  tal que  $gp_i = p'_i$  para todo  $i$ , é necessário e suficiente que as matrizes de Gram das coleções coincidam.

**Tarefa.** Prove o lema.

**Tarefa.\*\*** Formule e prove o lema sem a hipótese de não-degenerescência.

**Corolário.** Suponhamos que as coleções  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  e  $p'_1, \dots, p'_n \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  geram subespaços  $\mathbb{K}$ -lineares não-degenerados. Para que as coleções sejam **PU V-congruentes**, i.e., para a existência de isometria  $g \in \text{PU} V$  tal que  $gp_i = p'_i$  para todo  $i$ , é necessário e suficiente que as matrizes de Gram  $G, G'$  destas coleções sejam **equivalentes**, i.e., que  $DG\bar{D} = G'$  para uma apropriada matriz diagonal não-degenerada  $D$  ■

**Tarefa.** Prove que  $\widehat{\text{PU}}V$  é o grupo de todas as isometrias, i.e., que  $\widehat{\text{PU}}V = \text{Isom } \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ .

# Desigualdade triangular

A moral sobre a tância está incompleta: ainda não sabemos o que é a desigualdade triangular em termos da tância na parte riemanniana de  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ . Na desigualdade participam apenas 3 pontos. Assim, basta considerar os exemplos 4 e 5. Vejamos o caso hiperbólico complexo (exemplo 5), deixando o elíptico (exemplo 4) como uma **tarefa** fácil, para a solução da qual é suficiente substituir as funções hiperbólicas por trigonométricas.

Sejam  $p_1, p_2, p_3 \in B V$  com a matriz de Gram  $[g_{ij}]$ . Escolhemos representantes tais que  $g_{ii} = -1$ . Sendo a distância  $d_{ij}$  dada pela igualdade  $\cosh d_{ij} = |g_{ij}|$  e sendo a função  $\cosh x$  crescente para  $x \geq 0$ , a desigualdade triangular é equivalente a  $\operatorname{arccosh} |g_{12}| \leq \operatorname{arccosh} |g_{23}| + \operatorname{arccosh} |g_{31}|$ . Das fórmulas  $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$  e  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ , obtemos

$$\cosh(\operatorname{arccosh} |g_{23}| + \operatorname{arccosh} |g_{31}|) = |g_{23}g_{31}| + \sqrt{(|g_{23}|^2 - 1)(|g_{31}|^2 - 1)}.$$

Consequentemente, a desigualdade triangular é equivalente à desigualdade  $(|g_{12}| - |g_{23}g_{31}|)^2 \leq (|g_{23}|^2 - 1)(|g_{31}|^2 - 1)$ .

# Desigualdade triangular

Pelo critério de Sylvester,  $\det[g_{ij}] \leq 0$ , o que se escreve na forma

$$(|g_{12}| - |g_{23}g_{31}|)^2 + 2(|g_{12}g_{23}g_{31}| + \operatorname{Re}(g_{12}g_{23}g_{31})) \leq (|g_{23}|^2 - 1)(|g_{31}|^2 - 1),$$

obtendo-se o resultado desejado. Além disso, vemos que a igualdade ocorre exatamente quando  $\det[g_{ij}] = 0$  (os pontos  $p_i$ 's estão em uma mesma reta projetiva) e  $|g_{12}g_{23}g_{31}| + \operatorname{Re}(g_{12}g_{23}g_{31}) = 0$  (que significa  $g_{12}g_{23}g_{31} \in \mathbb{R}$ ). Em outras palavras, a igualdade na desigualdade triangular implica que os pontos ficam em uma mesma geodésica.

# Ângulos e área de triângulo

Aqui lidamos com o disco de Poincaré  $\overline{BV}$  na esfera de Riemann-Poincaré (exemplo 2). O caso da 2-esfera “redonda” (exemplo 1) é análogo.



# Ângulos e área de triângulo

Aqui lidamos com o disco de Poincaré  $\overline{BV}$  na esfera de Riemann-Poincaré (exemplo 2). O caso da 2-esfera “redonda” (exemplo 1) é análogo.

Sejam  $p_1, p_2 \in BV$  pontos distintos,  $p_1 \neq p_2$ . Escolhemos representantes tais que a matriz de Gram de  $p_1, p_2$  tem a forma  $\begin{bmatrix} -1 & g \\ g & -1 \end{bmatrix}$ , onde  $g \in ]-\infty, -1[$ . Então,  $\gamma(s) := (1-s)p_1 + sp_2$ ,  $s \in [0, 1]$ , é uma parametrização do segmento geodésico  $[p_1, p_2]$  que liga  $p_1, p_2$ . Logo  $\dot{\gamma}(0) = -\langle -, p_1 \rangle \pi[p_1](p_2 - p_1)$  e, conseqüentemente,  $t_2 := \langle -, p_1 \rangle \frac{\pi[p_1]p_2}{\langle p_2, p_1 \rangle}$  é um vetor tangente a  $[p_1, p_2]$  no ponto  $p_1$ , independentemente da escolha de representantes.

# Ângulos e área de triângulo

Aqui lidamos com o disco de Poincaré  $\overline{BV}$  na esfera de Riemann-Poincaré (exemplo 2). O caso da 2-esfera “redonda” (exemplo 1) é análogo.

Sejam  $p_1, p_2 \in BV$  pontos distintos,  $p_1 \neq p_2$ . Escolhemos representantes tais que a matriz de Gram de  $p_1, p_2$  tem a forma  $\begin{bmatrix} -1 & g \\ g & -1 \end{bmatrix}$ , onde  $g \in ]-\infty, -1[$ . Então,  $\gamma(s) := (1-s)p_1 + sp_2$ ,  $s \in [0, 1]$ , é uma parametrização do segmento geodésico  $[p_1, p_2]$  que liga  $p_1, p_2$ . Logo  $\dot{\gamma}(0) = -\langle -, p_1 \rangle \pi[p_1](p_2 - p_1)$  e, conseqüentemente,  $t_2 := \langle -, p_1 \rangle \frac{\pi[p_1]p_2}{\langle p_2, p_1 \rangle}$  é um vetor tangente a  $[p_1, p_2]$  no ponto  $p_1$ , independentemente da escolha de representantes.

O ângulo orientado  $\angle(t_2, t_3)$  de  $t_2$  a  $t_3$  se calcula pela fórmula  $\angle(t_2, t_3) = \text{Arg}\langle t_3, t_2 \rangle$ , onde a função  $\text{Arg}$  assume valores no intervalo  $[0, 2\pi[$ .

Tomemos pontos  $p_1, p_2, p_3 \in BV$  distintos por pares e denotemos por  $[g_{ij}]$  a correspondente matriz de Gram. Façamos  $t_i := \langle -, p_1 \rangle \frac{g_{11}p_i - g_{i1}p_1}{g_{i1}g_{11}}$ ,  $i = 2, 3$ . Então o ângulo orientado  $\alpha_1$  do triângulo  $\Delta(p_1, p_2, p_3)$  no vértice  $p_1$  é igual a  $\alpha_1 = \text{Arg}\langle t_3, t_2 \rangle = \text{Arg} \frac{g_{31}g_{12} - g_{32}g_{11}}{g_{31}g_{12}}$ .

# Ângulos e área de triângulo

Definimos a **área do triângulo orientado**  $\Delta(p_1, p_2, p_3)$  com vértices  $p_1, p_2, p_3 \in \overline{BV}$  pela fórmula

$$\text{area } \Delta(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) := \frac{1}{2} \arg(-\mathbf{g}_{12}\mathbf{g}_{23}\mathbf{g}_{31}),$$

onde a função  $\arg$  assume valores no intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Caso dois vértices coincidam e estejam no absoluto, a área é igual a 0 por definição.

# Ângulos e área de triângulo

Definimos a **área do triângulo orientado**  $\Delta(p_1, p_2, p_3)$  com vértices  $p_1, p_2, p_3 \in \overline{BV}$  pela fórmula

$$\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3) := \frac{1}{2} \arg(-g_{12}g_{23}g_{31}),$$

onde a função  $\arg$  assume valores no intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Caso dois vértices coincidam e estejam no absoluto, a área é igual a 0 por definição. De

$$\det[g_{ij}] = g_{11}(g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32}) - g_{22}g_{13}g_{31} - g_{33}g_{12}g_{21} + 2 \operatorname{Re}(g_{12}g_{23}g_{31})$$

e  $\det[g_{ij}] = 0$ , concluímos que  $\operatorname{Re}(g_{12}g_{23}g_{31}) < 0$  se  $p_1, p_2, p_3 \in BV$  e  $\operatorname{Re}(g_{12}g_{23}g_{31}) = 0$  se  $p_1, p_2, p_3 \in SV$ . Logo,  $\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3) \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  e  $\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3) = \pm \frac{\pi}{4}$  se e só se todos os vértices são distintos por pares e ficam no absoluto. A área é nula exatamente quando o triângulo é degenerado, i.e., os vértices estão em uma mesma geodésica. Note que a área é contínua em vértices na hipótese  $g_{ij} \neq 0$  para  $i \neq j$ .

# Ângulos e área de triângulo

Para todos  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \overline{BV}$  é válida a fórmula

$$\begin{aligned} \text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3) + \text{area } \Delta(p_3, p_4, p_1) &= \\ = \text{area } \Delta(p_2, p_3, p_4) + \text{area } \Delta(p_4, p_1, p_2). \end{aligned}$$

# Ângulos e área de triângulo

Para todos  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \overline{BV}$  é válida a fórmula

$$\begin{aligned} \text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3) + \text{area } \Delta(p_3, p_4, p_1) &= \\ &= \text{area } \Delta(p_2, p_3, p_4) + \text{area } \Delta(p_4, p_1, p_2). \end{aligned}$$

Realmente, podemos supor que  $g_{ij} \neq 0$  para  $i \neq j$ . Temos as congruências

$$\begin{aligned} \arg(-g_{12}g_{23}g_{31}) + \arg(-g_{34}g_{41}g_{13}) &\equiv_{2\pi} \arg(g_{12}g_{23}g_{34}g_{41}) \equiv_{2\pi} \\ &\equiv_{2\pi} \arg(-g_{23}g_{34}g_{42}) + \arg(-g_{41}g_{12}g_{24}). \end{aligned}$$

Por continuidade, podemos supor que  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in SV$ . Resta analisar as variantes.

# Ângulos e área de triângulo

Para todos  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \overline{BV}$  é válida a fórmula

$$\begin{aligned} \text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3) + \text{area } \Delta(p_3, p_4, p_1) &= \\ &= \text{area } \Delta(p_2, p_3, p_4) + \text{area } \Delta(p_4, p_1, p_2). \end{aligned}$$

Realmente, podemos supor que  $g_{ij} \neq 0$  para  $i \neq j$ . Temos as congruências

$$\begin{aligned} \arg(-g_{12}g_{23}g_{31}) + \arg(-g_{34}g_{41}g_{13}) &\equiv_{2\pi} \arg(g_{12}g_{23}g_{34}g_{41}) \equiv_{2\pi} \\ &\equiv_{2\pi} \arg(-g_{23}g_{34}g_{42}) + \arg(-g_{41}g_{12}g_{24}). \end{aligned}$$

Por continuidade, podemos supor que  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in SV$ . Resta analisar as variantes.

Com a fórmula demonstrada, podemos medir corretamente a área orientada de um polígono limitado por segmentos de geodésicas. Para isto, particionamos o polígono em triângulos e somamos as áreas destes. Da fórmula segue que o resultado não depende da partição pois duas partições admitem um refinamento comum.

# Ângulo orientado e área de triângulo

Denotando por  $\alpha_i$  os ângulos interiores do triângulo  $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ , mostraremos que  $|\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3)| = \frac{1}{4}(\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)$ .



# Ângulo orientado e área de triângulo

Denotando por  $\alpha_i$  os ângulos interiores do triângulo  $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ , mostraremos que  $|\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3)| = \frac{1}{4}(\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)$ .

Abrindo os parênteses, com toda a estupidez possível, obtemos

$$(g_{31}g_{12} - g_{32}g_{11})(g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22})(g_{23}g_{31} - g_{21}g_{33}) = (g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) \\ (g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32})(g_{33}g_{11} - g_{31}g_{13}) + (g_{12}g_{23}g_{31} - -g_{11}g_{22}g_{33}) \det[g_{ij}] < 0, \\ \text{pois } \det[g_{ij}] = 0.$$

# Ângulo orientado e área de triângulo

Denotando por  $\alpha_i$  os ângulos interiores do triângulo  $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ , mostraremos que  $|\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3)| = \frac{1}{4}(\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)$ .

Abrindo os parênteses, com toda a estupidez possível, obtemos

$(g_{31}g_{12} - g_{32}g_{11})(g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22})(g_{23}g_{31} - g_{21}g_{33}) = (g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})$   
 $(g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32})(g_{33}g_{11} - g_{31}g_{13}) + (g_{12}g_{23}g_{31} - -g_{11}g_{22}g_{33}) \det[g_{ij}] < 0$ ,  
pois  $\det[g_{ij}] = 0$ . (Utilizando o conceito de conexão ou outras ideias, podemos escapar deste cálculo. — Uma boa concepção economiza a vida!)

# Ângulo orientado e área de triângulo

Denotando por  $\alpha_i$  os ângulos interiores do triângulo  $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ , mostraremos que  $|\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3)| = \frac{1}{4}(\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)$ .

Abrindo os parênteses, com toda a estupidez possível, obtemos

$(g_{31}g_{12} - g_{32}g_{11})(g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22})(g_{23}g_{31} - g_{21}g_{33}) = (g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})$   
 $(g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32})(g_{33}g_{11} - g_{31}g_{13}) + (g_{12}g_{23}g_{31} - -g_{11}g_{22}g_{33}) \det[g_{ij}] < 0$ ,  
pois  $\det[g_{ij}] = 0$ . (Utilizando o conceito de conexão ou outras ideias, podemos escapar deste cálculo. — Uma boa concepção economiza a vida!)

Portanto,

$$\begin{aligned}\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= \text{Arg} \frac{-g_{31}g_{12}g_{12}g_{23}g_{23}g_{31}}{(g_{31}g_{12} - g_{32}g_{11})(g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22})(g_{23}g_{31} - g_{21}g_{33})} = \\ &= 2 \arg(-g_{12}g_{23}g_{31})\end{aligned}$$

se  $\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3) > 0$ .

# Ângulo orientado e área de triângulo

Denotando por  $\alpha_i$  os ângulos interiores do triângulo  $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ , mostraremos que  $|\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3)| = \frac{1}{4}(\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)$ .

Abrindo os parênteses, com toda a estupidez possível, obtemos

$(g_{31}g_{12} - g_{32}g_{11})(g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22})(g_{23}g_{31} - g_{21}g_{33}) = (g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})$   
 $(g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32})(g_{33}g_{11} - g_{31}g_{13}) + (g_{12}g_{23}g_{31} - -g_{11}g_{22}g_{33}) \det[g_{ij}] < 0$ ,  
pois  $\det[g_{ij}] = 0$ . (Utilizando o conceito de conexão ou outras ideias, podemos escapar deste cálculo. — Uma boa concepção economiza a vida!)

Portanto,

$$\begin{aligned}\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= \text{Arg} \frac{-g_{31}g_{12}g_{12}g_{23}g_{23}g_{31}}{(g_{31}g_{12} - g_{32}g_{11})(g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22})(g_{23}g_{31} - g_{21}g_{33})} = \\ &= 2 \arg(-g_{12}g_{23}g_{31})\end{aligned}$$

se  $\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3) > 0$ .

A fórmula  $|\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3)| = \frac{1}{4}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi)$  para a 2-esfera “redonda” de raio  $\frac{1}{2}$  (exemplo 1) pode ser provada de modo análogo.

# Ângulo orientado e área de triângulo

Denotando por  $\alpha_i$  os ângulos interiores do triângulo  $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ , mostraremos que  $|\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3)| = \frac{1}{4}(\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)$ .

Abrindo os parênteses, com toda a estupidez possível, obtemos

$(g_{31}g_{12} - g_{32}g_{11})(g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22})(g_{23}g_{31} - g_{21}g_{33}) = (g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})$   
 $(g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32})(g_{33}g_{11} - g_{31}g_{13}) + (g_{12}g_{23}g_{31} - -g_{11}g_{22}g_{33}) \det[g_{ij}] < 0$ ,  
pois  $\det[g_{ij}] = 0$ . (Utilizando o conceito de conexão ou outras ideias, podemos escapar deste cálculo. — Uma boa concepção economiza a vida!)

Portanto,

$$\begin{aligned}\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= \text{Arg} \frac{-g_{31}g_{12}g_{12}g_{23}g_{23}g_{31}}{(g_{31}g_{12} - g_{32}g_{11})(g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22})(g_{23}g_{31} - g_{21}g_{33})} = \\ &= 2 \arg(-g_{12}g_{23}g_{31})\end{aligned}$$

se  $\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3) > 0$ .

A fórmula  $|\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3)| = \frac{1}{4}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi)$  para a 2-esfera “redonda” de raio  $\frac{1}{2}$  (exemplo 1) pode ser provada de modo análogo.

**Observação.** No plano hiperbólico convencional, a distância é 2 vezes maior e, a área, 4.

# Trigonometria (para quem gosta)

*There is no sin south of the equator.*

Chico Buarque

# Trigonometria (para quem gosta)

*There is no sin south of the equator.*

Chico Buarque

Para variar, tomemos conhecimento da trigonometria da 2-esfera “redonda”  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  de raio  $\frac{1}{2}$  (exemplo 1).



# Trigonometria (para quem gosta)

*There is no sin south of the equator.*

Chico Buarque

Para variar, tomemos conhecimento da trigonometria da 2-esfera “redonda”  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  de raio  $\frac{1}{2}$  (exemplo 1).

Sejam  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  pontos distintos por pares e não-ortogonais por pares. Podemos escolher representantes para que a matriz de Gram tenha a forma  $G := \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_3 \bar{\varepsilon} \\ r_1 & 1 & r_2 \\ r_3 \varepsilon & r_2 & 1 \end{bmatrix}$ , onde  $0 < r_i := \sqrt{\text{ta}(p_i, p_{i+1})} < 1$  (índices módulo 3),  $|\varepsilon| = 1$  e  $\arg \varepsilon = 2 \text{ area } \Delta(p_1, p_2, p_3)$ . Claro que os comprimentos  $l_i := \ell[p_i, p_{i+1}]$  dos lados do triângulo satisfazem as desigualdades  $l_i < \frac{\pi}{2}$ .

# Trigonometria (para quem gosta)

*There is no sin south of the equator.*

Chico Buarque

Para variar, tomemos conhecimento da trigonometria da 2-esfera “redonda”  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  de raio  $\frac{1}{2}$  (exemplo 1).

Sejam  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  pontos distintos por pares e não-ortogonais por pares. Podemos escolher representantes para que a matriz de Gram tenha a forma  $G := \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_3 \bar{\varepsilon} \\ r_1 & 1 & r_2 \\ r_3 \varepsilon & r_2 & 1 \end{bmatrix}$ , onde  $0 < r_i := \sqrt{\tan(\rho_i, \rho_{i+1})} < 1$  (índices módulo 3),  $|\varepsilon| = 1$  e  $\arg \varepsilon = 2 \text{ area } \Delta(p_1, p_2, p_3)$ . Claro que os comprimentos  $l_i := \ell[p_i, p_{i+1}]$  dos lados do triângulo satisfazem as desigualdades  $l_i < \frac{\pi}{2}$ . Sendo  $\det G = 0$ , obtemos

$$1 + 2r_1 r_2 r_3 \operatorname{Re} \varepsilon - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 = 0.$$

Essa é a **identidade trigonométrica principal** da esfera. Todas as outras são fáceis consequências da principal.

# Trigonometria (para quem gosta)

**Tarefa.** Deduza a **primeira lei dos cossenos** para a esfera

$$\cos(2l_3) = \cos(2l_1) \cos(2l_2) + \cos \alpha \sin(2l_1) \sin(2l_2),$$

onde  $0 < \alpha < \pi$  é o ângulo interior do triângulo no vértice  $p_2$ .

**Tarefa.** Deduza a **lei dos senos** para a esfera

$$\frac{\sin(2l_1)}{\sin \alpha_3} = \frac{\sin(2l_2)}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin(2l_3)}{\sin \alpha_2},$$

onde  $\alpha_j$  é o ângulo interior do triângulo no vértice  $p_j$ .

**Tarefa.** Deduza as **primeira e segunda leis dos cossenos e a lei dos senos** para o disco de Poincaré

$$\cosh(2l_3) = \cosh(2l_1) \cosh(2l_2) - \cos \alpha_2 \sinh(2l_1) \sinh(2l_2),$$

$$\cos \alpha_2 + \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 = \cosh(2l_3) \sin \alpha_2 \sin \alpha_3,$$

$$\frac{\sinh(2l_1)}{\sin \alpha_3} = \frac{\sinh(2l_2)}{\sin \alpha_1} = \frac{\sinh(2l_3)}{\sin \alpha_2}.$$

Obrigado pela atenção!