LARGO AL FACTOTUM DELLA CITTA

SASHA ANAN′IN E CARLOS H. GROSSI

Se você deixa a Universidad de Sevilla e caminha pela rua Calle Palos de la Frontera (em direção à Plaza de España), pode inesperadamente ouvir a melodia

Rasori e pettini
lancette e forbici
al mio comando
tutto qui sta.[1]

vinda do interior de uma barbearia. Ela soa tão familiar que você decide entrar. O barbeiro se introduz:

— Ciao, mi chiamo Figaro, il barbiere-factotum.[2]
— Olá, sou um estudante de matemática aqui na universidade.
— Hum, um matemático ... Os matemáticos costumam me procurar somente por duas razões ... — Figaro parece incomodado.
— ... eles não sabem como resolver o Paradoxo do Barbeiro[3] ...
— ... ou eles não conseguem resolver seus problemas porque não conhecem as ferramentas lineares, como a Álgebra Linear! Isto para não dizer nada das Ferramentas Hermitianas! — Figaro agora está furioso.

Você pode ficar confuso. É algo compreensível que os matemáticos procurarem o barbeiro para se convencer de sua existência. Mas ...

— Por que diabos um ignorante em Álgebra Linear iria procurar você?
— Não saber Álgebra Linear é uma barbaridade. E eu sou um barbeiro, o que você espera? Sente-se e deixe-me te introduzir às ferramentas lineares e hermitianas:

Rasori e pettini
lancette e forbici
al mio comando
tutto qui sta.

Lidamos com espaços lineares de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Para abranger ambos os casos, denotamos os escalares por $\mathbb{K}$. O símbolo $\overline{k}$ denota o *conjugado* ao número (complexo) $k \in \mathbb{K}$.

1. Definição. Seja V um espaço $\mathbb{K}$-linear. Uma *forma hermitiana* é uma aplicação $\langle -,- \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ linear em x e tal que $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$ para todos $x,y \in V$. Em outras palavras, a forma é 1.5-*linear* pois $\langle kx,y \rangle = k\langle x,y \rangle$ e $\langle x,ky \rangle = \overline{k}\langle x,y \rangle$ para todo $k \in \mathbb{K}$. Se $W \leq V$ é um subespaço, então podemos restringir a forma $\langle -,- \rangle$ para W, obtendo um espaço linear W munido da forma hermitiana *induzida*.

[1] Navalhas e pentes/lâminas e tesouras/à minha disposição/tudo aqui está.
[2] Olá, chamo-me Figaro, o barbeiro faz-tudo.
[3] Também conhecido como Paradoxo de Russell (Bertrand Russell, filósofo e matemático britânico) : Quem barbeia o barbeiro que barbeia apenas os homens que não se barbeiam?

2. Definição. Seja V um espaço linear munido de uma forma hermitiana e seja $W \le V$ um subespaço. Definimos $W^\perp := \big\{v \in V \mid \langle v, W\rangle = 0\big\}$, o *ortogonal* a W. Chamamos $V^\perp$ o *núcleo* da forma em V. Se o núcleo é nulo, dizemos que a forma é *não-degenerada.* Se a forma induzida em um subespaço $W \le V$ é não-degenerada, W é dito *não-degenerado.* Para $U, W \le V$, o *ortogonal* de W *relativo* a U é dado por $W^{\perp_U} := W^\perp \cap U$.

3. Exercício. Mostre que $W^\perp \le V$ e $W \subset W^{\perp\perp}$ para todo $W \le V$. Prove também que $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ para todos $W_1, W_2 \le V$. A identidade $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$ é válida?

4. Exercício. Defina a forma induzida em $V/V^\perp$ e verifique que esta definição é correta. Mostre que $V/V^\perp$ é não-degenerado. Decompondo $V = V^\perp \oplus W$, prove que os espaços $V/V^\perp$ e W munidos das formas induzidas são naturalmente isomorfos.

5. Exercício. Para $W \le V$, mostre que $\dim W + \dim W^\perp \ge \dim V$.

6. Exercício. Mostre que $V = W \oplus W^\perp$ para todo subespaço não-degenerado $W \le V$.

7. Exercício. Suponha que ambos W e V são não-degenerados, onde $W \le V$. Prove que $W^{\perp\perp} = W$.

8. Exercício. Suponha que ambos W e V são não-degenerados, onde $W \le V$. Mostre que $W^\perp$ é não-degenerado.

9. Exercício. Mostre que existe um elemento *não-isotrópico* $v \in V$, isto é, $\langle v, v\rangle \ne 0$, se $\langle -, -\rangle \not\equiv 0$.

10. Exercício. Suponha que ambos W e V são não-degenerados, onde $W \lneqq V$. Mostre que existe um subespaço não-degenerado $W' \le V$ tal que $W \le W'$ e $\dim W' = \dim W + 1$.

11. Definição. Uma *bandeira* de subespaços é uma cadeia de subespaços $V_0 \le V_1 \le \dots \le V_n$ tal que $V_n = V$ e $\dim V_i = i$ para todo i. Se V está munido de uma forma hermitiana, uma bandeira é *não-degenerada* quando todos os V_i's são não-degenerados.

12. Exercício. Mostre que todo espaço linear não-degenerado admite uma bandeira não-degenerada de subespaços.

13. Definição. Uma base linear $\beta : b_1, b_2, \dots, b_n$ é *ortonormal* se $\langle b_i, b_i\rangle \in \{-1, 0, 1\}$ e $\langle b_i, b_j\rangle = 0$ para todos i e j tais que $i \ne j$. Denote por $\beta_-, \beta_0, \beta_+$ a quantidade de elementos na base β tais que $\langle b_i, b_i\rangle = -1$, $\langle b_i, b_i\rangle = 0$, $\langle b_i, b_i\rangle = 1$, respectivamente. A tripla $(\beta_-, \beta_0, \beta_+)$ é a *assinatura* da base.

14. Exercício. Seja $\beta : b_1, b_2, \dots, b_n$ uma base ortonormal em V. Mostre que β_0 é a dimensão do núcleo da forma em V, $\beta_0 = \dim V^\perp$.

15. Ortogonalização de Gram-Schmidt. *Seja $V_0 \le V_1 \le \dots \le V_n$ uma bandeira não-degenerada de subespaços em V. Então existe uma base ortonormal $b_1, b_2, \dots, b_n$ em V tal que $b_1, b_2, \dots, b_k$ é uma base em V_k para todo k.*

Demonstração. Indução em n. Para $n = 1$, simplesmente tomamos algum $0 \ne c_1 \in V_1$ e o normalizamos: $b_1 := \dfrac{c_1}{\sqrt{|\langle c_1, c_1\rangle|}}$. (Sendo V_1 não-degenerado, $\langle c_1, c_1\rangle \ne 0$.) Suponha que, para algum $k < n$, já tenhamos encontrado uma base ortonormal $b_1, b_2, \dots, b_k$ em V_k tal que $b_1, b_2, \dots, b_i$ é uma base em V_i para todo $i \le k$. Escolhemos $c_{k+1} \in V_{k+1} \setminus V_k$ e colocamos $c'_{k+1} = c_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{\langle c_{k+1}, b_i\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} b_i$. Levando em conta que os b_i's são ortogonais, um cálculo direto mostra que $\langle c'_{k+1}, b_i\rangle = 0$ para todo $i \le k$. Se c'_{k+1} fosse isotrópico, então pertenceria ao núcleo da forma em V_{k+1}. Portanto, c'_{k+1} é não-isotrópico e podemos normalizar c'_{k+1}, obtendo o b_{k+1} desejado ∎

16. Corolário. *Todo espaço linear com uma forma hermitiana admite uma base ortonormal.*

Demonstração. Pelo Exercício 4, podemos assumir que o espaço V é não-degenerado. Utilizando o Exercício 10, podemos contruir uma bandeira não-degenerada de subespaços em V. Agora, o resultado segue de 15 ∎

17. Definição. Sejam $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$. A matriz $G := G(v_1, v_2, \dots, v_k) := [g_{ij}]$, onde $g_{ij} := \langle v_i, v_j\rangle$, é chamada a matriz de *Gram* de $v_1, v_2, \dots, v_k$.

Obviamente, $\overline{G}^t = G$, onde M^t denota a matriz transposta de M e $\overline{M}$ denota a matriz M com entradas conjugadas. Em outras palavras, G é *hermitiana* (*simétrica*).

A matriz de Gram $G^{\beta\beta} := G(b_1, b_2, \dots, b_n)$ de uma base $\beta : b_1, b_2, \dots, b_n$ em V determina a forma hermitiana em V já que $\langle v, v'\rangle = [v]_\beta^t G^{\beta\beta}\overline{[v']}_\beta$ para todos $v, v' \in V$, onde $[v]_\beta$ denota a matriz coluna cujas entradas são os coeficientes c_i que aparecem na combinação linear $v = \sum\limits_{i=1}^n c_i b_i$. De fato, se $v = \sum\limits_{i=1}^n c_i b_i$ e $v' = \sum\limits_{i=1}^n c'_i b_i$, então $\langle v, v'\rangle = \sum\limits_{i,j=1}^n c_i\langle b_i, b_j\rangle\overline{c'}_j = \sum\limits_{i,j=1}^n c_i g_{ij}\overline{c'}_j$. Uma base é ortonormal se e só se sua matriz de Gram é diagonal com entradas $-1, 0, 1$ na diagonal. Enfatizamos que toda matriz hermitiana é a matriz de Gram de uma base em um certo espaço linear com uma forma hermitiana apropriada.

Seja $\alpha : a_1, a_2, \dots, a_n$ uma outra base em V e seja $M_\alpha^\beta = [m_{ij}]$ a matriz representando a mudança de base de α para β, ou seja, $b_j = \sum\limits_{i=1}^n m_{ij} a_i$ para todo j. Então

$$g_{kl} = \langle b_k, b_l\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^n m_{ik} a_i, \sum_{i=1}^n m_{jl} a_j \Big\rangle = \sum_{i,j=1}^n m_{ik}\langle a_i, a_j\rangle\overline{m}_{jl} = \sum_{i,j=1}^n m_{ik} f_{ij}\overline{m}_{jl},$$

onde $G^{\alpha\alpha} = [f_{ij}]$. Obtemos a relação $G^{\beta\beta} = (M_\alpha^\beta)^t G^{\alpha\alpha}\overline{M_\alpha^\beta}$. Em particular, segue que o sinal de $\det G^{\beta\beta}$ não depende da escolha da base já que

$$\det G^{\beta\beta} = \det(M_\alpha^\beta)^t \det G^{\alpha\alpha} \det \overline{M_\alpha^\beta} = \det M_\alpha^\beta \det G^{\alpha\alpha}\overline{\det M_\alpha^\beta} = |\det M_\alpha^\beta|^2 \det G^{\alpha\alpha}.$$

18. Lema. *Seja $G^{\beta\beta}$ a matriz de Gram de uma base em um espaço linear V. Então V é degenerado se e só se* $\det G^{\beta\beta} = 0$ ∎

19. Exemplo. Sejam $V \ni e, f$ tais que $\langle e, e\rangle > 0 > \langle f, f\rangle$. Seja $W := \mathbb{K}e + \mathbb{K}f$. Então $\dim W = 2$ e toda base ortonormal em W tem assinatura $(1, 0, 1)$. Ainda mais, W contém elementos isotrópicos (não-nulos).

De fato, podemos tomar $W = V$. Se $0 \neq n \in V^\perp$, então $V = \mathbb{K}b + \mathbb{K}n$ para algum $b \in V$. Assumindo $\langle b, b\rangle \geq 0$ obtemos $\langle v, v\rangle \geq 0$ para todo $v \in V$ e assumindo $\langle b, b\rangle \leq 0$ obtemos $\langle v, v\rangle \leq 0$ para todo $v \in V$. Ambos os casos são impossíveis porque V contém um elemento positivo e um elemento negativo. Por uma razão similar, $\dim V = 2$. Tomando uma base ortonormal β em V, é fácil ver que a assinatura de tal base é distinta de $(2, 0, 0)$ (já que V contém um elemento positivo) e de $(0, 0, 2)$ (já que V contém um elemento negativo). Pelo Exercício 14, $\beta_0 = 0$. Logo, a assinatura é $(1, 0, 1)$. Obviamente, a soma dos elementos da base ortonormal é um elemento isotrópico.

20. Lei da inércia de Sylvester. *A assinatura não depende da escolha de uma base ortonormal.*

Demonstração. Indução em $\dim V$. Pelos Exercícios 4 e 14, podemos assumir que V é não-degenerado. Sejam $\beta : b_1, b_2, \dots, b_n$ e $\beta' : b'_1, b'_2, \dots, b'_n$ bases ortonormais. Assim, $\beta_0 = \beta'_0 = 0$ pelo

Exercício 14. Se $\beta_-=0$, então $\langle v,v\rangle\geq 0$ para todo $v\in V$, implicando que $\beta'_-=0$. Do mesmo modo, $\beta_+=0$ implica que $\beta'_+=0$. Portanto, podemos assumir que $\langle b_n,b_n\rangle=1$ e $\langle b'_n,b'_n\rangle=-1$. Definimos

$$W:=\mathbb{K}b_n+\mathbb{K}b'_n,\qquad U:=(\mathbb{K}b_n)^\perp,\qquad U'=(\mathbb{K}b'_n)^\perp.$$

É fácil ver que $U=\mathbb{K}b_1+\mathbb{K}b_2+\cdots+\mathbb{K}b_{n-1}$ e $U'=\mathbb{K}b'_1+\mathbb{K}b'_2+\cdots+\mathbb{K}b'_{n-1}$. Portanto, as assinaturas das bases indicadas em U e U' são respectivamente $(\beta_-,0,\beta_+-1)$ e $(\beta'_--1,0,\beta'_+)$. Pelo Exercício 3, $W^\perp=U\cap U'$. Pelos Exemplo 19 e Exercício 14, W é não-degenerado. Logo, $U\cap U'$ é não-degenerado pelo Exercício 8. Aplicando o Exercício 6 aos espaços U e U' e ao subespaço $U\cap U'$, obtemos as decomposições ortogonais $U=(U\cap U')\oplus(U\cap U')^{\perp U}$ e $U'=(U\cap U')\oplus(U\cap U')^{\perp U'}$. Utilizando o Corolário 16, escolhemos uma base ortonormal α em $U\cap U'$. Sejam γ e γ' bases ortonormais respectivamente em $(U\cap U')^{\perp U}$ e $(U\cap U')^{\perp U'}$. Portanto, $\alpha\sqcup\gamma$ e $\alpha\sqcup\gamma'$ são bases ortonormais respectivamente em U e U'. Calculando as assinaturas, obtemos

$$(\beta_-,0,\beta_+-1)=\big((\alpha\sqcup\gamma)_-,(\alpha\sqcup\gamma)_0,(\alpha\sqcup\gamma)_+\big)=(\alpha_-,\alpha_0,\alpha_+)+(\gamma_-,\gamma_0,\gamma_+),$$

$$(\beta'_--1,0,\beta'_+)=\big((\alpha\sqcup\gamma')_-,(\alpha\sqcup\gamma')_0,(\alpha\sqcup\gamma')_+\big)=(\alpha_-,\alpha_0,\alpha_+)+(\gamma'_-,\gamma'_0,\gamma'_+)$$

já que as assinaturas não dependem das escolhas de bases ortogonais em U e U' pela hipótese de indução. Resta mostrar que $(U\cap U')^{\perp U}=(\mathbb{K}b_n)^{\perp W}$ e que $(U\cap U')^{\perp U'}=(\mathbb{K}b'_n)^{\perp W}$ uma vez que isto implica que $(\gamma_-,\gamma_0,\gamma_+)=(1,0,0)$ e $(\gamma'_-,\gamma'_0,\gamma'_+)=(0,0,1)$ pelo Exemplo 19.

Sendo W e V não-degenerados, $(U\cap U')^{\perp U}=(U\cap U')^\perp\cap U=W^{\perp\perp}\cap U=W\cap(\mathbb{K}b_n)^\perp=(\mathbb{K}b_n)^{\perp W}$ pelo Exercício 7. Pela mesma razão, $(U\cap U')^{\perp U'}=(\mathbb{K}b'_n)^{\perp W}$ ∎

Podemos agora falar da *assinatura* de um espaço. Como a medir? Pelo Exercício 14, $\beta_0=\dim V^\perp$. Utilizando o Exercício 4, o problema pode ser reduzido ao caso de um V não-degenerado. Seja $\gamma: c_1,c_2,\dots,c_n$ uma base em V com uma matriz de Gram $G^{\gamma\gamma}$ conhecida. Queremos encontrar a assinatura de V em termos de $G^{\gamma\gamma}$. Definindo $V_k:=\mathbb{K}c_1+\mathbb{K}c_2+\cdots+\mathbb{K}c_k$ para todo $0\leq k\leq n$, obtemos uma bandeira de subespaços. Obviamente, a matriz de Gram da base $c_1,c_2,\dots,c_k$ em V_k é a $(k\times k)$-submatriz $G_k^{\gamma\gamma}$ (chamda uma submatriz *principal*) formada pelas primeiras k linhas e pelas primeiras k colunas de $G^{\gamma\gamma}=G_n^{\gamma\gamma}$. Assumimos que a bandeira é não-degenerada. Pelo Lema 18, isto é equivalente a $\det G_k^{\gamma\gamma}\neq 0$ para todo $1\leq k\leq n$. Aplicamos[4] a Ortogonalização 15 à bandeira e observamos que os sinais dos determinantes $\det G_k^{\gamma\gamma}$ relativos às bases $b_1,b_2,\dots,b_k,c_{k+1},c_{k+2},\dots,c_n$ não se alteram quando aumentamos k já que os primeiros l elementos em $b_1,b_2,\dots,b_k,c_{k+1},c_{k+2},\dots,c_n$ constitutem uma base em V_l para todo l. Quando atingimos uma base ortonormal, a assinatura pode ser medida como se segue:

21. Critério de Sylvester. *Se $\det G_k^{\gamma\gamma}\neq 0$ para todo $1\leq k\leq n$, então a assinatura do espaço é igual a $(n_-,0,n_+)$, onde n_- é a quantidade de números negativos na sequência*

$$\det G_1^{\gamma\gamma},\qquad \frac{\det G_2^{\gamma\gamma}}{\det G_1^{\gamma\gamma}},\qquad \frac{\det G_3^{\gamma\gamma}}{\det G_2^{\gamma\gamma}},\qquad \dots,\qquad \frac{\det G_n^{\gamma\gamma}}{\det G_{n-1}^{\gamma\gamma}}$$

e n_+ é a quantidade de números positivos nesta mesma sequência ∎

22.* Exercício. Encontre um critério sem a hipótese $\det G_k^{\gamma\gamma}\neq 0$ para todo k.

Os Exercícios 23–26 são referentes ao estudo de possíveis assinaturas de um subespaço quando a assinatura do espaço é dada. Note que dois espaços da mesma assinatura admitem um isomorfismo entre si que preserva a forma.

[4]Como normalmente acontece, a demonstração é mais importante do que o próprio fato.

23. Exercício. Seja V um espaço de assinatura (n_-, n_0, n_+). Mostre que V contém um subespaço W de assinatura (m_-, m_0, m_+) se e só se o espaço $V/V^\perp$ (de assinatura $(n_-, 0, n_+)$) possui um subespaço de assinatura $(m_-, m_0 - m, m_+)$ para algum m tal que $0 \le m \le n_0$.

24. Exercício. Seja V um espaço de assinatura $(n_-, 0, n_+)$. Mostre que $\min(n_-, n_+)$ é a maior dimensão possível de um subespaço W com forma induzida nula.

25. Exercício. Seja V um espaço de assinatura $(n_-, 0, n_+)$. Mostre que V contém um subespaço W de assinatura (m_-, m_0, m_+) se e só se

$$m_- \le n_-, \qquad m_+ \le n_+, \qquad m_0 \le n_- - m_-, \qquad m_0 \le n_+ - m_+.$$

26. Exercício. Seja V um espaço de assinatura (n_-, n_0, n_+). Mostre que V contém um subespaço de assinatura (m_-, m_0, m_+) se e só se

$$m_- \le n_-, \qquad m_+ \le n_+, \qquad m_- + m_0 \le n_- + n_0, \qquad m_0 + m_+ \le n_0 + n_+.$$

27. Dicas. 5. Por indução em $\dim W$, decomponha $W = W' \oplus \mathbb{K}w$. Sendo ${W'}^\perp \cap (\mathbb{K}w)^\perp$ o núcleo do funcional ${W'}^\perp \to \mathbb{K}$ dado pela regra $x \mapsto \langle x, w\rangle$, temos $\dim W^\perp = \dim\big({W'}^\perp \cap (\mathbb{K}w)^\perp\big) \ge \dim {W'}^\perp - 1$ pelo Exercício 3. O resto segue de $\dim W = \dim W' - 1$ por indução.

6. $W \cap W^\perp$ é o núcleo da forma induzida em W.

7. Use $W \subset {W^\perp}^\perp$ e o Exercício 6.

9. Assumindo que $\langle v, v\rangle = 0$ para todo $v \in V$, obtemos $\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2\rangle = 0$ e, portanto, $\operatorname{Re}\langle v_1, v_2\rangle = 0$ para todos $v_1, v_2 \in V$. Resta aplicar a última identidade a iv_1, v_2.

10. Usando os Exercícios 8 e 9, podemos encontrar um $w \in W^\perp$ não-isotrópico e colocar $W' := W + \mathbb{K}w$.

23. Considere $m = \dim(W \cap V^\perp)$ e aplique o Exercício 4.

24. Decomponha V na soma ortogonal $V = V_- \oplus V_+$ de subespaços de assinaturas $(n_-, 0, 0)$ e $(0, 0, n_+)$. Se, digamos, $\dim W > n_- \le n_+$, então $W \cap V_+ \ne 0$. Para construir um subespaço de dimensão $\min(n_-, n_+)$ com a forma induzida nula, use os elementos isotrópicos mencionados no Exemplo 19.

25. Decomponha W na soma ortogonal $W = W_- \oplus W_0 \oplus W_+$ de subespaços de assinaturas $(m_-, 0, 0)$, $(0, m_0, 0)$ e $(0, 0, m_+)$. Decompondo $V = (W_- + W_+) \oplus (W_- + W_+)^\perp$, note que $m_- \le n_-$, $m_+ \le n_+$ e $W_0 \le (W_- + W_+)^\perp$, onde $(W_- + W_+)^\perp$ tem assinatura $(n_- - m_-, 0, n_+ - m_+)$. Utilizando o Exercício 24, conclua que $m_0 \le n_- - m_-$ e $m_0 \le n_+ - m_+$. Para m_-, m_0 e m_+ que satisfazem as desigualdades acima, construa um subespaço de assinatura (m_-, m_0, m_+).