

Topologia de fibrados de discos

seminário “Estruturas geométricas em variedades”

Sasha Anan'in

ICMC-USP, São Carlos

15–22.10.2014

Grupo turnover e sua ação fiel e discreta sobre o disco de Poincaré

Grupo turnover e sua ação fiel e discreta sobre o disco de Poincaré

O grupo turnover T_{n_1, n_2, n_3} é dado por relações definidoras

$$T_{n_1, n_2, n_3} := \langle t_1, t_2, t_3 \mid t_1^{n_1} = t_2^{n_2} = t_3^{n_3} = t_3 t_2 t_1 = 1 \rangle, \text{ onde } 1 \leq n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}.$$

Grupo turnover e sua ação fiel e discreta sobre o disco de Poincaré

O grupo turnover T_{n_1, n_2, n_3} é dado por relações definidoras $T_{n_1, n_2, n_3} := \langle t_1, t_2, t_3 \mid t_1^{n_1} = t_2^{n_2} = t_3^{n_3} = t_3 t_2 t_1 = 1 \rangle$, onde $1 \leq n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$. O grupo turnover admite uma representação fiel e discreta no grupo $\text{Isom}^+ \mathbb{D} = \text{PU}(1, 1)$ de isometrias do disco de Poincaré que preservam orientação exatamente quando $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} < 1$. Mais ainda, tal representação é única a menos de conjugação por elementos do grupo $\text{Isom} \mathbb{D}$. (Em outras palavras, o grupo turnover é **rígido**.)

Grupo turnover e sua ação fiel e discreta sobre o disco de Poincaré

O grupo turnover T_{n_1, n_2, n_3} é dado por relações definidoras $T_{n_1, n_2, n_3} := \langle t_1, t_2, t_3 \mid t_1^{n_1} = t_2^{n_2} = t_3^{n_3} = t_3 t_2 t_1 = 1 \rangle$, onde $1 \leq n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$. O grupo turnover admite uma representação fiel e discreta no grupo $\text{Isom}^+ \mathbb{D} = \text{PU}(1, 1)$ de isometrias do disco de Poincaré que preservam orientação exatamente quando $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} < 1$. Mais ainda, tal representação é única a menos de conjugação por elementos do grupo $\text{Isom} \mathbb{D}$. (Em outras palavras, o grupo turnover é **rígido**.) Vamos entender porque.

Grupo turnover e sua ação fiel e discreta sobre o disco de Poincaré

O grupo turnover T_{n_1, n_2, n_3} é dado por relações definidoras $T_{n_1, n_2, n_3} := \langle t_1, t_2, t_3 \mid t_1^{n_1} = t_2^{n_2} = t_3^{n_3} = t_3 t_2 t_1 = 1 \rangle$, onde $1 \leq n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$. O grupo turnover admite uma representação fiel e discreta no grupo $\text{Isom}^+ \mathbb{D} = \text{PU}(1, 1)$ de isometrias do disco de Poincaré que preservam orientação exatamente quando $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} < 1$. Mais ainda, tal representação é única a menos de conjugação por elementos do grupo $\text{Isom} \mathbb{D}$. (Em outras palavras, o grupo turnover é **rígido**.) Vamos entender porque.

Suponhamos que $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} < 1$. Consideremos um triângulo geodésico $\Delta := \Delta(v_1, v_3, v_2)$ com os ângulos $\frac{\pi}{n_i}$ nos vértices v_i (tal triângulo é geometricamente único) e denotemos por t_i a rotação por $\frac{2\pi}{n_i}$ em torno do vértice v_i . Colando o triângulo Δ com sua cópia $\Delta' := \Delta(v_1, v_2, v_4)$, simétrica relativamente ao lado $[v_2, v_1]$, obtemos o quadrilátero fundamental $Q := Q(v_1, v_3, v_2, v_4)$ para o grupo turnover.

Realmente, as isometrias t_1 e t_2 , que identificam os lados de Q , mandam o interior de Q para o exterior. Os ciclos combinatórios de vértices de Q são $[v_1]$, $[v_2]$, $[v_3, v_4]$. É fácil ver que $t_3 t_2 t_1 = 1$. Consequentemente, o ângulo total de cada um dos três ciclos geométricos é igual a 2π . Agora a afirmação segue do teorema poliedral de Poincaré.

Realmente, as isometrias t_1 e t_2 , que identificam os lados de Q , mandam o interior de Q para o exterior. Os ciclos combinatórios de vértices de Q são $[v_1]$, $[v_2]$, $[v_3, v_4]$. É fácil ver que $t_3 t_2 t_1 = 1$. Consequentemente, o ângulo total de cada um dos três ciclos geométricos é igual a 2π . Agora a afirmação segue do teorema poliedral de Poincaré.

Por razões semelhantes, se mostram a recíproca e a rigidez do grupo turnover.

Realmente, as isometrias t_1 e t_2 , que identificam os lados de Q , mandam o interior de Q para o exterior. Os ciclos combinatórios de vértices de Q são $[v_1]$, $[v_2]$, $[v_3, v_4]$. É fácil ver que $t_3 t_2 t_1 = 1$. Consequentemente, o ângulo total de cada um dos três ciclos geométricos é igual a 2π . Agora a afirmação segue do teorema poliedral de Poincaré.

Por razões semelhantes, se mostram a recíproca e a rigidez do grupo turnover. Aparece a seguinte questão natural.

Questão.

Realmente, as isometrias t_1 e t_2 , que identificam os lados de Q , mandam o interior de Q para o exterior. Os ciclos combinatórios de vértices de Q são $[v_1]$, $[v_2]$, $[v_3, v_4]$. É fácil ver que $t_3 t_2 t_1 = 1$. Consequentemente, o ângulo total de cada um dos três ciclos geométricos é igual a 2π . Agora a afirmação segue do teorema poliedral de Poincaré.

Por razões semelhantes, se mostram a recíproca e a rigidez do grupo turnover. Aparece a seguinte questão natural.

Questão. Por que a mão está tentando pegar uma arma? (Indique duas razões.)

Realmente, as isometrias t_1 e t_2 , que identificam os lados de Q , mandam o interior de Q para o exterior. Os ciclos combinatórios de vértices de Q são $[v_1]$, $[v_2]$, $[v_3, v_4]$. É fácil ver que $t_3 t_2 t_1 = 1$. Consequentemente, o ângulo total de cada um dos três ciclos geométricos é igual a 2π . Agora a afirmação segue do teorema poliedral de Poincaré.

Por razões semelhantes, se mostram a recíproca e a rigidez do grupo turnover. Aparece a seguinte questão natural.

Questão. Por que a mão está tentando pegar uma arma? (Indique duas razões.)

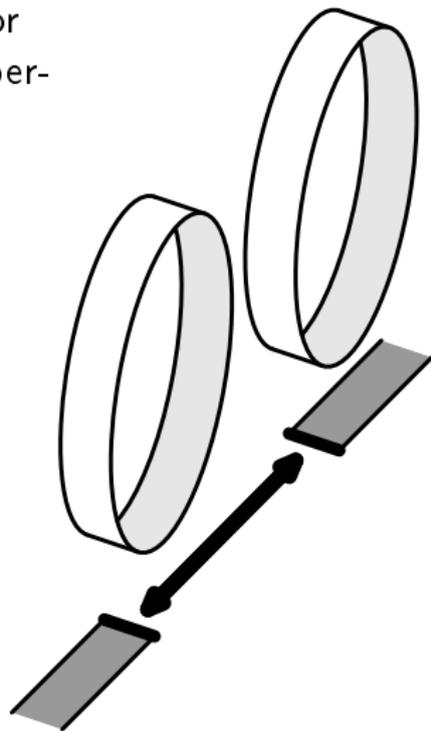
Pelo teorema de Selberg, cada grupo finitamente gerado de matrizes sobre um corpo de característica 0 possui um subgrupo de índice finito sem torsão. A ação de tal subgrupo $G \leq T_{n_1, n_2, n_3}$ de índice n é cocompacta e, portanto, totalmente descontínua sobre o disco \mathbb{D} . Além disso, um polígono fundamental para G pode ser composto de n cópias do quadrilátero Q . Consequentemente, $\Sigma := \mathbb{D}/G$ é uma superfície fechada orientável com área $2\pi n(1 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_3})$. Pelo teorema de Gauss-Bonnet, a característica de Euler χ_Σ da superfície Σ é igual a $n(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} - 1)$.

Um pouco de topologia

Um pouco de topologia



Qualquer fibrado orientável por discos fechados sobre uma superfície orientável com bordo é trivial.



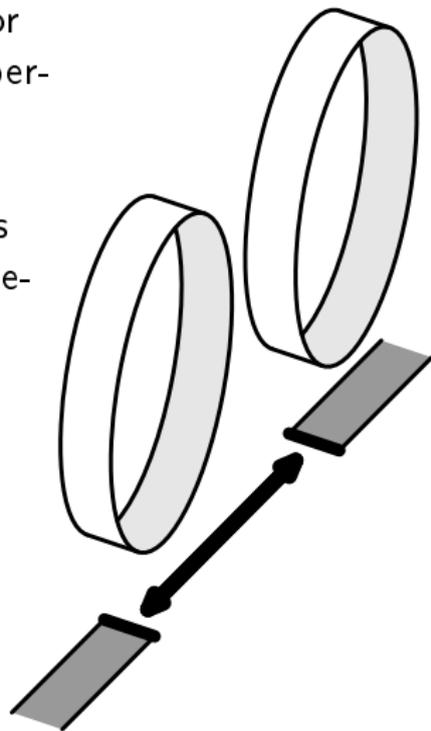
Um pouco de topologia



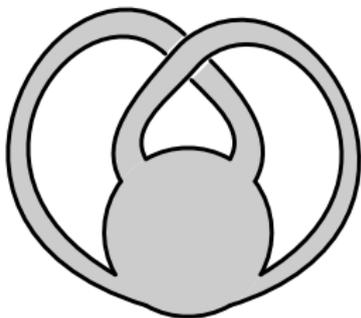
Qualquer fibrado orientável por discos fechados sobre uma superfície orientável com bordo é trivial.

Com efeito, aplicando às fibras funtores “cone” e “bordo”, podemos lidar com fibrados orientáveis por circunferências.

táveis por circunferências.



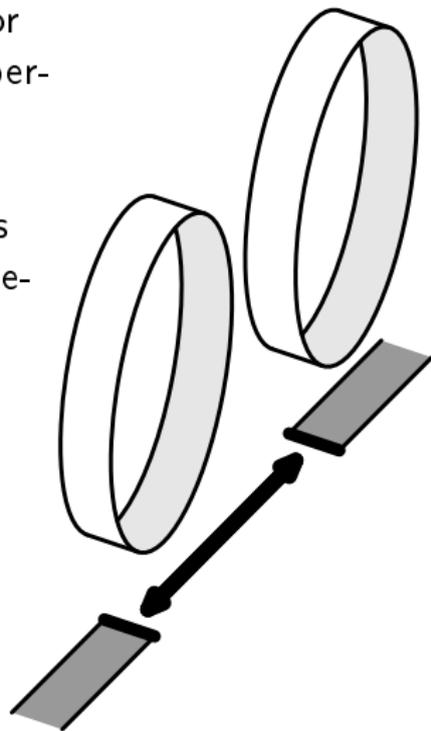
Um pouco de topologia



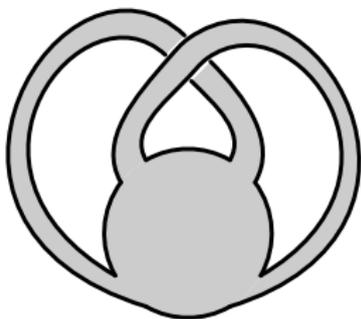
Qualquer fibrado orientável por discos fechados sobre uma superfície orientável com bordo é trivial.

Com efeito, aplicando às fibras funtores “cone” e “bordo”, podemos lidar com fibrados orientáveis por circunferências.

Quando colamos os segmentos, temos exatamente duas opções a menos de isotopia de colagens fibra a fibra de correspondentes cilindros,



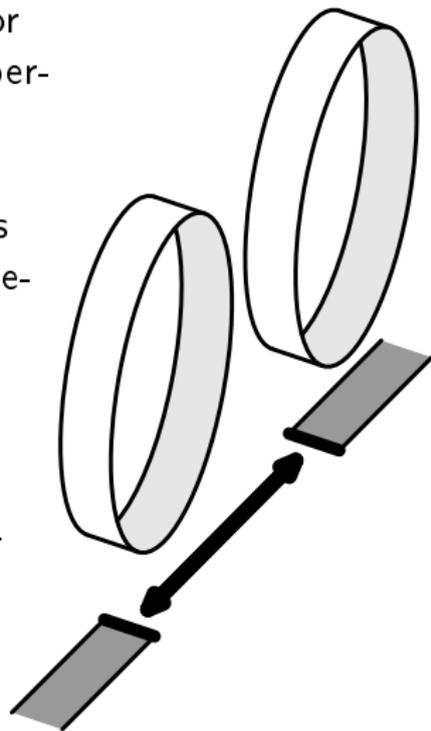
Um pouco de topologia



Qualquer fibrado orientável por discos fechados sobre uma superfície orientável com bordo é trivial.

Com efeito, aplicando às fibras funtores “cone” e “bordo”, podemos lidar com fibrados orientáveis por circunferências.

Quando colamos os segmentos, temos exatamente duas opções a menos de isotopia de colagens fibra a fibra de correspondentes cilindros, uma das quais dá um resultado não orientável, enquanto a outra produz um fibrado trivial.



Um pouco de topologia

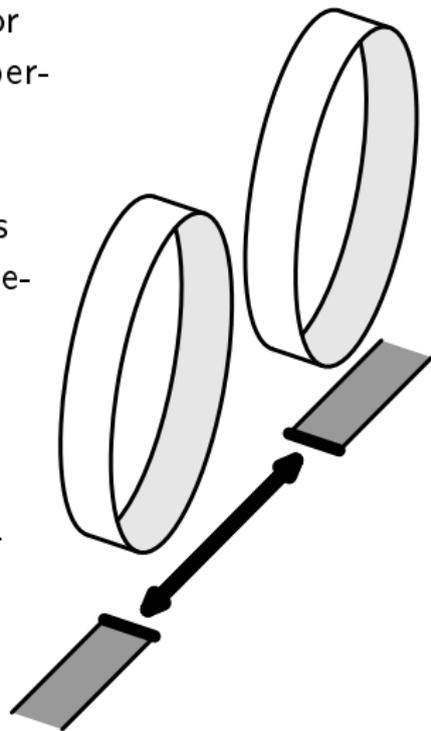


Qualquer fibrado orientável por discos fechados sobre uma superfície orientável com bordo é trivial.

Com efeito, aplicando às fibras funtores “cone” e “bordo”, podemos lidar com fibrados orientáveis por circunferências.

Quando colamos os segmentos, temos exatamente duas opções a menos de isotopia de colagens fibra a fibra de correspondentes cilindros, uma das quais dá um resultado não orientável, enquanto a outra produz um fibrado trivial.

Agora é claro, que existe um único invariante topológico de um fibrado orientável sobre uma superfície fechada. É o número de Euler.



Um pouco mais de topologia

Um pouco mais de topologia

Seja $\overline{M} \xrightarrow{\pi} \Sigma$ um fibrado orientável por discos fechados sobre uma superfície fechada orientável Σ e seja Γ um grafo que corta a superfície Σ para um disco $\overline{\mathbb{D}}$ de modo que a correspondente colagem do bordo $\partial\overline{\mathbb{D}}$ do disco $\overline{\mathbb{D}}$ transforma $\partial\overline{\mathbb{D}}$ em Γ e $\overline{\mathbb{D}}$ em Σ .

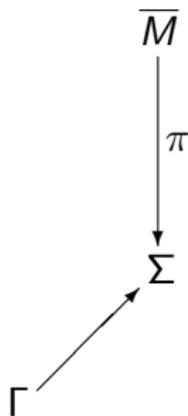
Um pouco mais de topologia

Seja $\overline{M} \xrightarrow{\pi} \Sigma$ um fibrado orientável por discos fechados sobre uma superfície fechada orientável Σ e seja Γ um grafo que corta a superfície Σ para um disco $\overline{\mathbb{D}}$ de modo que a correspondente colagem do bordo $\partial\overline{\mathbb{D}}$ do disco $\overline{\mathbb{D}}$ transforma $\partial\overline{\mathbb{D}}$ em Γ e $\overline{\mathbb{D}}$ em Σ .

$$\begin{array}{c} \overline{M} \\ \downarrow \pi \\ \Sigma \end{array}$$

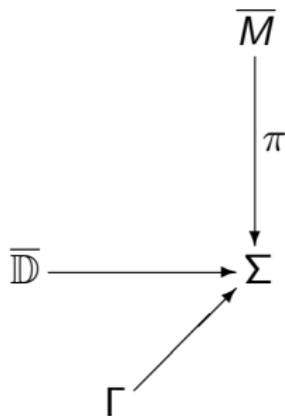
Um pouco mais de topologia

Seja $\overline{M} \xrightarrow{\pi} \Sigma$ um fibrado orientável por discos fechados sobre uma superfície fechada orientável Σ e seja Γ um grafo que corta a superfície Σ para um disco $\overline{\mathbb{D}}$ de modo que a correspondente colagem do bordo $\partial\overline{\mathbb{D}}$ do disco $\overline{\mathbb{D}}$ transforma $\partial\overline{\mathbb{D}}$ em Γ e $\overline{\mathbb{D}}$ em Σ .



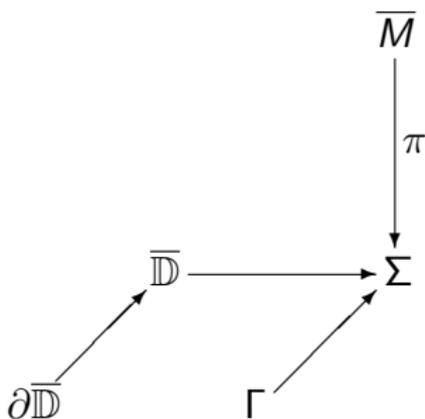
Um pouco mais de topologia

Seja $\overline{M} \xrightarrow{\pi} \Sigma$ um fibrado orientável por discos fechados sobre uma superfície fechada orientável Σ e seja Γ um grafo que corta a superfície Σ para um disco $\overline{\mathbb{D}}$ de modo que a correspondente colagem do bordo $\partial\overline{\mathbb{D}}$ do disco $\overline{\mathbb{D}}$ transforma $\partial\overline{\mathbb{D}}$ em Γ e $\overline{\mathbb{D}}$ em Σ .



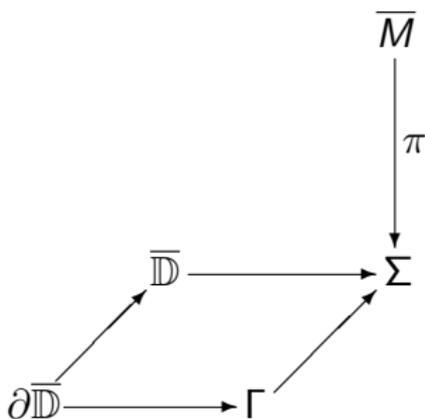
Um pouco mais de topologia

Seja $\overline{M} \xrightarrow{\pi} \Sigma$ um fibrado orientável por discos fechados sobre uma superfície fechada orientável Σ e seja Γ um grafo que corta a superfície Σ para um disco $\overline{\mathbb{D}}$ de modo que a correspondente colagem do bordo $\partial\overline{\mathbb{D}}$ do disco $\overline{\mathbb{D}}$ transforma $\partial\overline{\mathbb{D}}$ em Γ e $\overline{\mathbb{D}}$ em Σ .



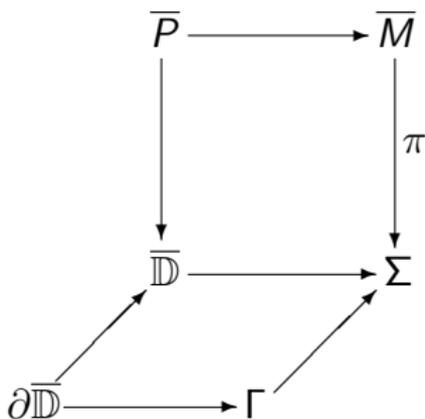
Um pouco mais de topologia

Seja $\overline{M} \xrightarrow{\pi} \Sigma$ um fibrado orientável por discos fechados sobre uma superfície fechada orientável Σ e seja Γ um grafo que corta a superfície Σ para um disco $\overline{\mathbb{D}}$ de modo que a correspondente colagem do bordo $\partial\overline{\mathbb{D}}$ do disco $\overline{\mathbb{D}}$ transforma $\partial\overline{\mathbb{D}}$ em Γ e $\overline{\mathbb{D}}$ em Σ .



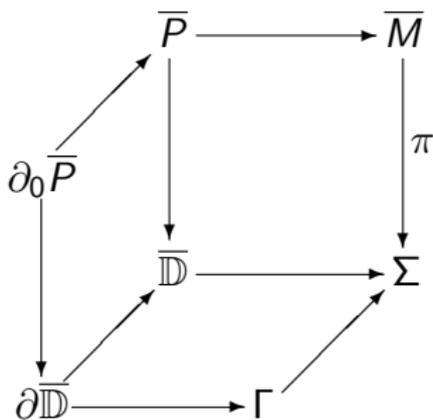
Um pouco mais de topologia

Seja $\overline{M} \xrightarrow{\pi} \Sigma$ um fibrado orientável por discos fechados sobre uma superfície fechada orientável Σ e seja Γ um grafo que corta a superfície Σ para um disco $\overline{\mathbb{D}}$ de modo que a correspondente colagem do bordo $\partial\overline{\mathbb{D}}$ do disco $\overline{\mathbb{D}}$ transforma $\partial\overline{\mathbb{D}}$ em Γ e $\overline{\mathbb{D}}$ em Σ .



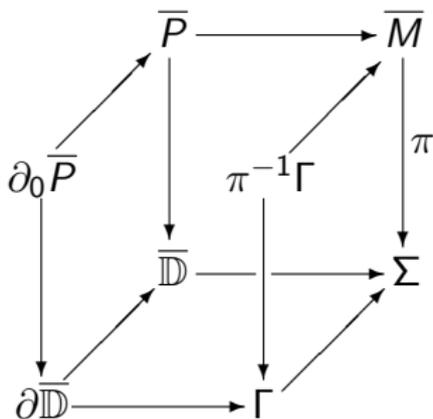
Um pouco mais de topologia

Seja $\overline{M} \xrightarrow{\pi} \Sigma$ um fibrado orientável por discos fechados sobre uma superfície fechada orientável Σ e seja Γ um grafo que corta a superfície Σ para um disco $\overline{\mathbb{D}}$ de modo que a correspondente colagem do bordo $\partial\overline{\mathbb{D}}$ do disco $\overline{\mathbb{D}}$ transforma $\partial\overline{\mathbb{D}}$ em Γ e $\overline{\mathbb{D}}$ em Σ .



Um pouco mais de topologia

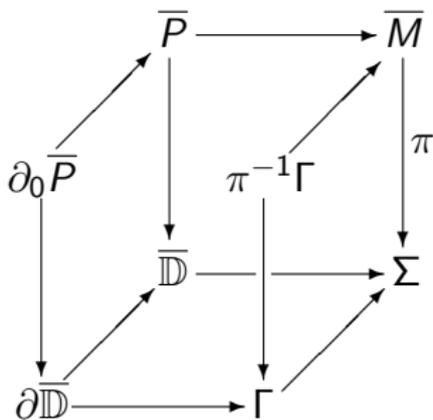
Seja $\overline{M} \xrightarrow{\pi} \Sigma$ um fibrado orientável por discos fechados sobre uma superfície fechada orientável Σ e seja Γ um grafo que corta a superfície Σ para um disco $\overline{\mathbb{D}}$ de modo que a correspondente colagem do bordo $\partial\overline{\mathbb{D}}$ do disco $\overline{\mathbb{D}}$ transforma $\partial\overline{\mathbb{D}}$ em Γ e $\overline{\mathbb{D}}$ em Σ .



Um pouco mais de topologia

Seja $\overline{M} \xrightarrow{\pi} \Sigma$ um fibrado orientável por discos fechados sobre uma superfície fechada orientável Σ e seja Γ um grafo que corta a superfície Σ para um disco $\overline{\mathbb{D}}$ de modo que a correspondente colagem do bordo $\partial\overline{\mathbb{D}}$ do disco $\overline{\mathbb{D}}$ transforma $\partial\overline{\mathbb{D}}$ em Γ e $\overline{\mathbb{D}}$ em Σ .

Três faces laterais do cubo são definidos como pullbacks.

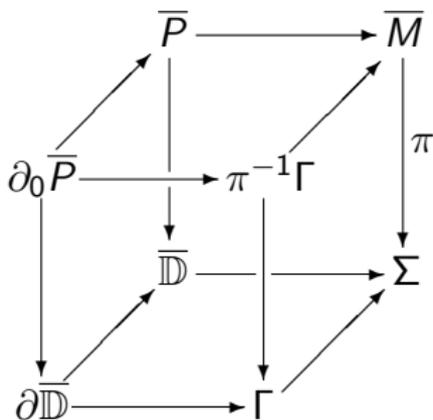


Um pouco mais de topologia

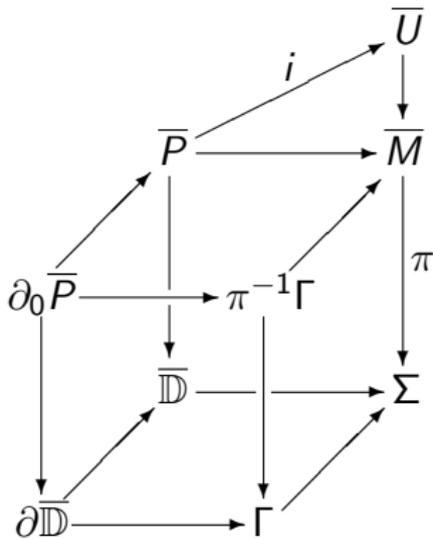
Seja $\bar{M} \xrightarrow{\pi} \Sigma$ um fibrado orientável por discos fechados sobre uma superfície fechada orientável Σ e seja Γ um grafo que corta a superfície Σ para um disco $\bar{\mathbb{D}}$ de modo que a correspondente colagem do bordo $\partial\bar{\mathbb{D}}$ do disco $\bar{\mathbb{D}}$ transforma $\partial\bar{\mathbb{D}}$ em Γ e $\bar{\mathbb{D}}$ em Σ .

Três faces laterais do cubo são definidos como pullbacks.

Portanto, existe uma única aplicação $\partial_0\bar{P} \rightarrow \pi^{-1}\Gamma$ tal que a quarta face lateral também é um pullback e todo cubo é comutativo.



Um pouco mais de topologia



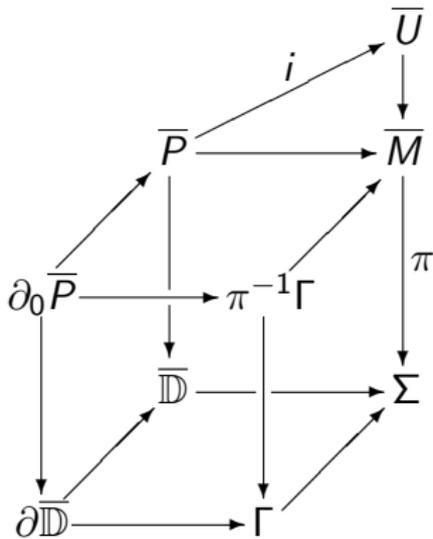
Seja $\bar{M} \xrightarrow{\pi} \Sigma$ um fibrado orientável por discos fechados sobre uma superfície fechada orientável Σ e seja Γ um grafo que corta a superfície Σ para um disco \bar{D} de modo que a correspondente colagem do bordo $\partial \bar{D}$ do disco \bar{D} transforma $\partial \bar{D}$ em Γ e \bar{D} em Σ .

Três faces laterais do cubo são definidos como pullbacks.

Portanto, existe uma única aplicação $\partial_0 \bar{P} \rightarrow \pi^{-1}\Gamma$ tal que a quarta face lateral também é um pullback e todo cubo é comutativo.

É fácil ver que i é um mergulho no recobrimento universal \bar{U} .

Um pouco mais de topologia



Seja $\bar{M} \xrightarrow{\pi} \Sigma$ um fibrado orientável por discos fechados sobre uma superfície fechada orientável Σ e seja Γ um grafo que corta a superfície Σ para um disco \bar{D} de modo que a correspondente colagem do bordo $\partial \bar{D}$ do disco \bar{D} transforma $\partial \bar{D}$ em Γ e \bar{D} em Σ .

Três faces laterais do cubo são definidos como pullbacks.

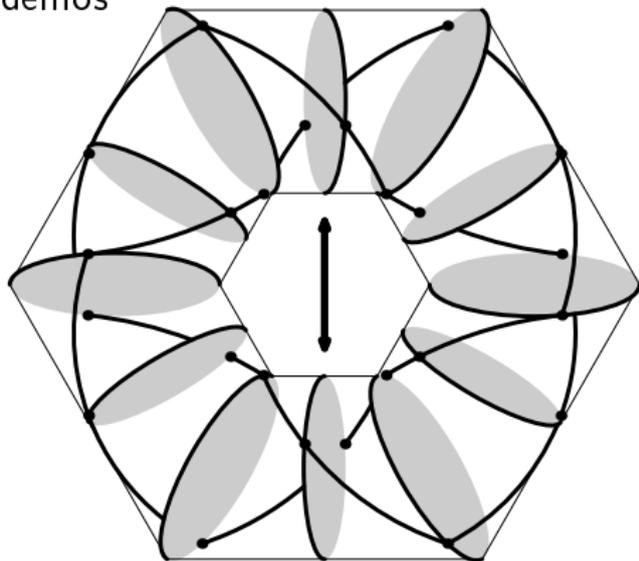
Portanto, existe uma única aplicação $\partial_0 \bar{P} \rightarrow \pi^{-1}\Gamma$ tal que a quarta face lateral também é um pullback e todo cubo é comutativo.

É fácil ver que i é um mergulho no recobrimento universal \bar{U} . O fibrado $\pi^{-1}\Gamma \rightarrow \Gamma$ (sobre a superfície com bordo) é trivial. Em termos da trivialização induzida, $\partial_0 \bar{P} \simeq \mathbb{B}^2 \times \partial \bar{D}$, a variedade \bar{M} se obtém da bola \bar{P} pela colagem de uma certa parte $\partial_0 \bar{P}$ de seu bordo que copia a colagem $\partial \bar{D} \rightarrow \Gamma$ por meio dessa trivialização.

Já basta de topologia?

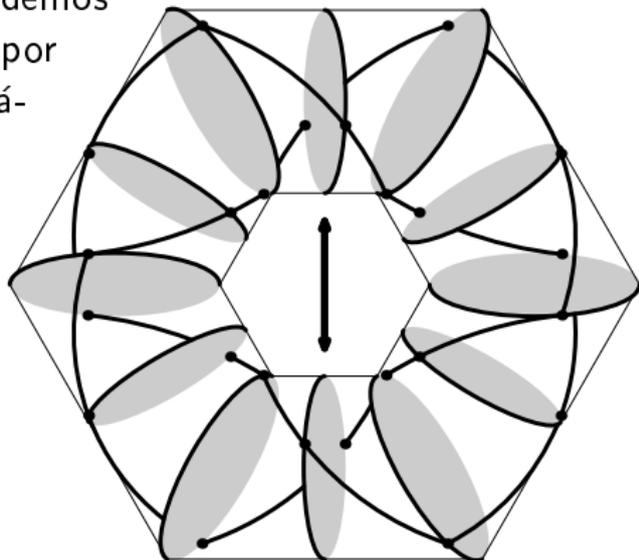
Já basta de topologia?

Supondo que \bar{U} é uma bola fechada, podemos “vislumbrar” o número de Euler.



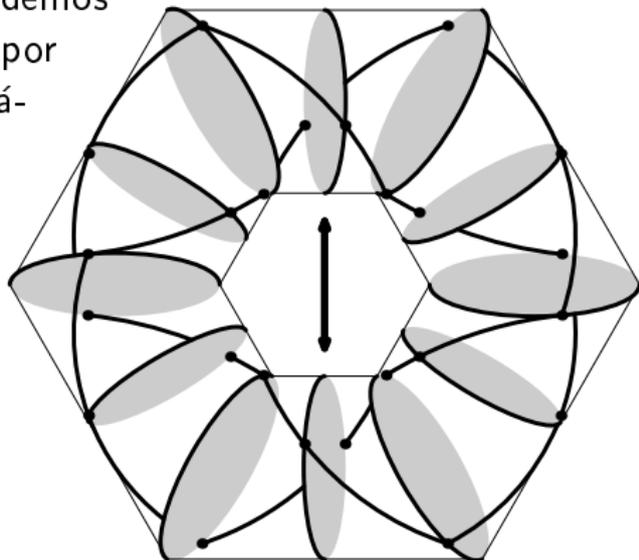
Já basta de topologia?

Supondo que \bar{U} é uma bola fechada, podemos “vislumbrar” o número de Euler. Seja, por exemplo, Σ um toro obtido de um hexágono por colar lados opostos.



Já basta de topologia?

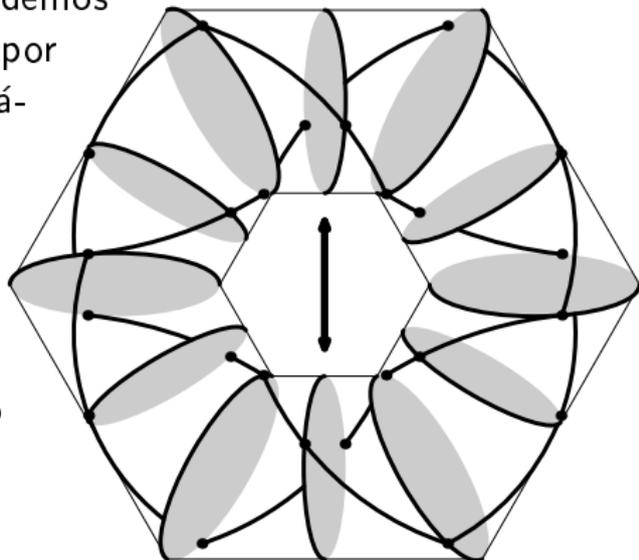
Supondo que \bar{U} é uma bola fechada, podemos “vislumbrar” o número de Euler. Seja, por exemplo, Σ um toro obtido de um hexágono por colar lados opostos. A identificação de cilindros sólidos, fibrados por discos e por segmentos que correspondem a estes lados, tem que respeitar ambos fibrados de cilindros.



Já basta de topologia?

Supondo que \bar{U} é uma bola fechada, podemos “vislumbrar” o número de Euler. Seja, por exemplo, Σ um toro obtido de um hexágono por colar lados opostos.

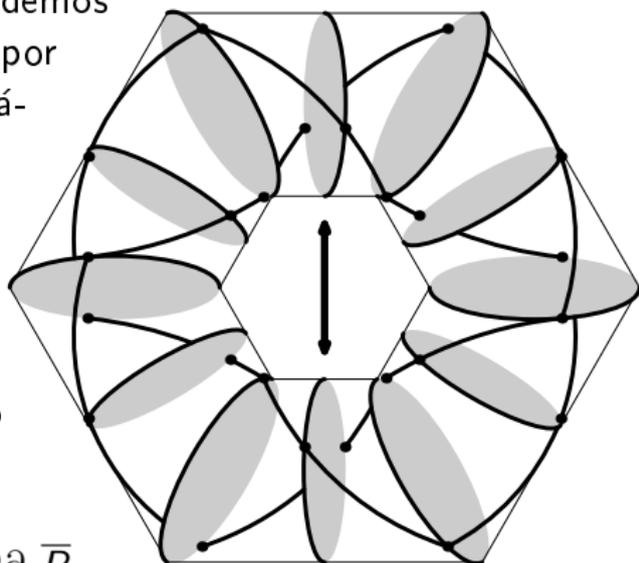
A identificação de cilindros sólidos, fibrados por discos e por segmentos que correspondem a estes lados, tem que respeitar ambos fibrados de cilindros. Os cilindros formam um toro sólido $\partial_0 \bar{P}$ fibrado por circunferências (hachuradas) S e por discos.



Já basta de topologia?

Supondo que \bar{U} é uma bola fechada, podemos “vislumbrar” o número de Euler. Seja, por exemplo, Σ um toro obtido de um hexágono por colar lados opostos.

A identificação de cilindros sólidos, fibrados por discos e por segmentos que correspondem a estes lados, tem que respeitar ambos fibrados de cilindros. Os cilindros formam um toro sólido $\partial_0 \bar{P}$ fibrado por circunferências (hachuradas) S e por discos. O hexágono C , situado no desenho no toro $\partial \partial_0 \bar{P}$, é **contrátil** dentro do toro sólido $\partial_1 \bar{P}$ que complementa o toro sólido $\partial_0 \bar{P}$ até a 3-esfera $\partial \bar{P} = \partial_0 \bar{P} \cup \partial_1 \bar{P}$.



Já basta de topologia?

Supondo que \bar{U} é uma bola fechada, podemos “vislumbrar” o número de Euler. Seja, por exemplo, Σ um toro obtido de um hexágono por colar lados opostos.

A identificação de cilindros sólidos, fibrados por discos e por segmentos que correspondem a estes lados, tem que respeitar ambos fibrados de cilindros. Os cilindros formam um toro sólido $\partial_0 \bar{P}$ fibrado por circunferências (hachuradas) S e por discos. O hexágono C , situado no desenho no toro $\partial \partial_0 \bar{P}$, é **contrátil** dentro do toro sólido $\partial_1 \bar{P}$ que complementa o toro sólido $\partial_0 \bar{P}$ até a 3-esfera $\partial \bar{P} = \partial_0 \bar{P} \cup \partial_1 \bar{P}$. O número de Euler é o número algébrico de interseções de C e S .

