$\boxed{\textbf{4.}^a \textbf{ Lista de Exercícios de EDO}}$

Professor: Everaldo de Mello Bonotto

Questão 1) Encontre as variedades estável e instável da origem de $\dot{x} = Ax$, onde $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 10 \\ 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}$.

Questão 2) Seja A uma matriz real de ordem n tal que $Re\sigma(A) \neq 0$.

(a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ contínua e limitada em $\mathbb{R}$. Mostre que a equação $\dot{x} = Ax + f(t)$ possui uma única solução limitada em $\mathbb{R}$ e que essa solução é dada por:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)}\Pi_-(f(s))ds + \int_{+\infty}^{t} e^{A(t-s)}\Pi_+(f(s))ds,$$

onde Π_- e Π_+ são as projeções sobre a variedade estável e instável de $\dot{x} = Ax$, respectivamente.

(b) Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e seja $\rho > 0$ tal que

$$|F(t,x) - F(t,y)| \leq \rho|x - y|$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$. Mostre que existe $\rho_0 > 0$ tal que se $\rho \in]0, \rho_0]$, então a equação $\dot{x} = Ax + F(t,x)$ possui uma única solução limitada em $\mathbb{R}$.

Questão 3) Seja $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ uma função de classe C^1 tal que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$. Mostre que existe uma função η tal que $f \in Lyap(\eta)$.

Questão 4) Encontre os pontos críticos e discuta a estabilidade (S, AS, US, UAS) ou instabilidade dos mesmos para $\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = -x - x^2. \end{cases}$

Questão 5) Mostre que a origem do sistema $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y^2 \\ \dot{y} = xy - y^3 \end{cases}$ é assintoticamente estável. (Tente uma função de Lyapunov da forma $V(x,y) = x^2 + ay^2$).

Questão 6) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1. Consideremos a equação $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$. Suponha que $\displaystyle\int_0^x g(s)ds \to +\infty$ quando $|x| \to +\infty$, $f(x) > 0$ e $xg(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ com $x \neq 0$. Usando a função $V(x,y) = \dfrac{1}{2}y^2 + \displaystyle\int_0^x g(s)ds$, mostre que a origem é globalmente assintoticamente estável.

Questão 7) Mostre que a origem de $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ é assintoticamente estável:

a) utilizando autovalores;

b) utilizando o exercício 6);

c) utilizando um funcional do tipo $V(x,y) = x^2 + axy + by^2$.

Questão 8) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Considere o sistema $\begin{cases} \dot{x} = y + xf(x,y) \\ \dot{y} = -x + yf(x,y). \end{cases}$

Considerando o funcional $V(x,y) = x^2 + y^2$:

a) encontre condições sobre f para que a solução nula do sistema seja assintoticamente estável.

b) encontre condições sobre f para que a solução nula do sistema seja instável.

Questão 9) Ajuste um funcional de Lyapunov a fim de provar que a solução nula do sistema $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = 12x + y \end{cases}$ seja instável.

Questão 10) Mostre que o sistema $\begin{cases} \dot{x} = y - x^5 \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ não admite órbitas fechadas.

Questão 11) Dado $\epsilon > 0$, mostre que a origem de $\begin{cases} \dot{x} = y - \epsilon\left(x - \frac{x^3}{3}\right) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ é assintoticamente estável e que a bola aberta $B((0,0), \sqrt{3})$ está no centro de atração da origem.

Questão 12) Suponha que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uma função de classe C^1 e que $xg(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ tal que $|x| \leq \delta$. Mostre que existe uma vizinhança V da origem tal que toda solução do sistema $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases}$ que começa em V, permanece em V. Além disso, existe uma solução periódica em V.