$\boxed{\textbf{2.}^a \textbf{ Lista de Exercícios de EDO}}$

Professor: Everaldo de Mello Bonotto

Questão 1) No Teorema da Desigualdade de Grownwall Generalizada, suponha também que $\alpha'(t)$ exista e $\alpha'(t) \geq 0$ para todo $t \in [a, b]$. Mostre que

$$\phi(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_a^t \beta(s)\right) ds$$

para todo $t \in [a, b]$. Mostre, também, que podemos trocar a hipótese de continuidade da função β por β Lebesgue integrável e $\beta(t) \geq 0$ para todo $t \in [a, b]$.

Questão 2) Sejam ρ e β funções contínuas não negativas definidas para todo $t \geq 0$. Suponha também que β seja decrescente e que $\int_0^{+\infty} \rho(s)ds < \infty$. Se u é uma função limitada e contínua definida para todo $t \geq 0$ tal que $u(t) \geq 0$ e $u(t) \leq \beta(t) + \displaystyle\int_t^{+\infty} \rho(s)u(s)ds$ para todo $t \geq 0$, mostre que

$$u(t) \leq \beta(t) exp\left(\int_t^{+\infty} \rho(s)ds\right)$$

para todo $t \geq 0$.

Questão 3) Sejam $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^k$ conjuntos abertos e $f : D \times V \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Seja $\lambda_0 \in V$ e suponha que o PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda_0) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

possua única solução maximal $x(t, t_0, x_0, \lambda_0)$ definida no intervalo maximal (ω_-, ω_+). Seja $[a, b]$ tal que

$$t_0 \in (a, b) \subset [a, b] \subset (\omega_-, \omega_+).$$

Mostre que existem vizinhanças $W \subset D$ de (t_0, x_0) e $\widetilde{W} \subset V$ de λ_0 tais que para todo $(s, \eta, \lambda) \in W \times \widetilde{W}$ o PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda) \\ x(s) = \eta, \end{cases}$$

possui uma única solução $x(t, s, \eta, \lambda)$ definida em $[a, b]$. Além disso, $(t, s, \eta, \lambda) \longmapsto x(t, s, \eta, \lambda)$ é contínua em $(\bar{t}, t_0, x_0, \lambda_0)$ para todo $\bar{t} \in [a, b]$.

Questão 4) Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e localmente Lipschitziana em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Se $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, denotaremos $f(t, x) = (f_1(t, x), \ldots, f_n(t, x))$ e $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Suponha que

$$f_1(t, (0, x_2, \ldots, x_n)) \geq 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $(0, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Seja $H_+ := \{(t, (x_1, \ldots, x_n)) : x_1 \geq 0\}$. Mostre que se $(t_0, x_0) \in H_+$ e se x é solução maximal do PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

então $(t, x(t)) \in H_+$ para todo $t \in (\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0))$ com $t \geq t_0$.

Questão 5) Considere o PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = x + \lambda + g(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞ e $g(x) = o(|x|)$ quando $x \to 0$. Seja $x(t, 0, x_0, \lambda)$ a solução do PVI.

(a) Analise a continuidade de $x(t, 0, x_0, \lambda)$ com relação aos parâmetros.

(b) Analise a diferenciabilidade de $x(t,0,x_0,\lambda)$ com relação a x_0 e λ.

(c) Calcule $\dfrac{\partial x}{\partial \lambda}(t,0,0,0)$ e $\dfrac{\partial x}{\partial x_0}(t,0,0,0)$.

Obs.: Dizemos que $g(x)=o(|x|)$ quando $x\to 0$ se $\dfrac{g(x)}{|x|}\to 0$ quando $x\to 0$.

Questão 6) Seja $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Suponha que exista uma solução φ de $\dot{x}=f(x)$ tal que $\varphi(t)\to x_0$ quando $t\to+\infty$ para algum $x_0\in\mathbb{R}^n$. Mostre que x_0 é um ponto crítico de $\dot{x}=f(x)$. Estabeleça um resultado análogo para $t\to-\infty$.

Questão 7) Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ um aberto e $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Seja φ uma solução maximal de $\dot{x}=f(x)$ tal que $\varphi(t)\to x_0$ quando $t\to\omega_+(\varphi)$, onde $x_0\in\mathbb{R}^n$ é um ponto crítico de $\dot{x}=f(x)$. Mostre que $\omega_+(\varphi)=+\infty$.

Questão 8) Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ uma função contínua e periódica. Suponha que exista uma sequência de períodos $\{T_k\}_{k\geq 1}$ da função g tal que $T_k>0$ para todo natural $k\geq 1$ e $T_k\to 0$ quando $k\to+\infty$. Mostre que g é constante.

Questão 9) Mostre que se y está no órbita de x, então $\omega(x)=\omega(y)$.

Questão 10) Mostre que se a órbita que passa por x é periódica então $\omega(x)$ é uma órbita periódica.

Questão 11) Seja $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^2. A equação $\dot{x}=-\nabla F(x)$ é chamada um sistema gradiente. Dado $x_0\in\mathbb{R}^n$, considere o seguinte PVI

$$\begin{cases}\dot{x}=-\nabla F(x)\\ x(0)=x_0.\end{cases}\tag{1}$$

Seja $x(\cdot,x_0)$ a única solução maximal do PVI (1).

a) Suponha que $x(\cdot,x_0)$ esteja definida em $[0,+\infty)$ e que o limite $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t,x_0)$ exista. Denote tal limite por a. Mostre que a é um ponto de equilíbrio de (1).

b) Suponha que $x(\cdot,x_0)$ esteja definida em $[0,+\infty)$ e é limitada em $[0,+\infty)$. Mostre que $\omega(x_0)\neq\emptyset$ e que todo ponto de $\omega(x_0)$ é um ponto de equilíbrio de (1).

c) Se cada ponto de equilíbrio de (1) é isolado, mostre que $\omega(x_0)$ é um conjunto unitário.

d) Suponha que $F(x)\to+\infty$ quando $|x|\to+\infty$. Mostre que $x(\cdot,x_0)$ está definida para todo $t\geq 0$ e é limitada.

e) Mostre que toda equação diferencial autônoma unidimensional é um sistema gradiente.