$\boxed{\textbf{1.}^a \textbf{ Lista de Exercícios de EDO}}$

Professor: Everaldo de Mello Bonotto

Questão 1) Mostre que o Teorema de Schauder não é válido em geral se tirarmos ou a compacidade ou a convexidade.

Questão 2) Seja $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função, onde D é um aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Mostre que se f e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ forem contínuas em D então f é localmente Lipschitziana com relação a segunda variável em D.

Questão 3) *a*) Sejam M um espaço métrico completo e $f : M \to M$ uma contração. Mostre que f possui um único ponto fixo em M.

b) Sejam M um espaço métrico completo e $f : M \to M$ uma aplicação tal que $f^k : M \to M$ é uma contração para algum $k \geq 1$. Mostre que f possui um único ponto fixo em M.

c) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ compacto e $K > 0$ uma constante de Lipschitz de f em $I \times \mathbb{R}^n$. Considere o operador $\mathcal{L} : C(I, \mathbb{R}^n) \to C(I, \mathbb{R}^n)$ definido por $\mathcal{L}(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$, $t \in I$, onde $t_0 \in I$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Mostre que

$$|\mathcal{L}^m(\mu)(t) - \mathcal{L}^m(\nu)(t)| \leq \frac{K^m}{m!}|t - t_0|^m d(\mu, \nu),$$

quaisquer que sejam $\mu, \nu \in C(I, \mathbb{R}^n)$, $m \geq 0$ e $t \in I$.

d) [Aproximações Sucessivas] Seja $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua no aberto $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Se $[a, b] \times \mathbb{R}^n \subset D$ e f é lipschitziana em $[a, b] \times \mathbb{R}^n$, mostre que para quaisquer $t_0 \in [a, b]$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução para o PVI $\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ definida no intervalo $[a, b]$.

Questão 4) Sejam $A : I \to \mathbb{M}(n)$ e $b : I \to \mathbb{R}^n$ contínuas no intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Mostre que para quaisquer $t_0 \in I$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, a equação linear

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

admite única solução definida no intervalo I.

Questão 5) Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e tal que para cada $a > 0$, f é lipschitziana com relação à segunda variável em $[-a, a] \times \mathbb{R}^n$ com constante de lipschitz $L_a > 0$. Mostre que toda solução de $\dot{x} = f(t, x)$ está definida em $\mathbb{R}$.

Questão 6) Seja $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função, onde D é um aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Suponha que f e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas em D.

a) Seja $x_i : I_i \to \mathbb{R}^n$ uma solução do PVI $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, definida no intervalo I_i, $i = 1, 2$. Mostre que $x_1(t) = x_2(t)$ para cada $t \in I_1 \cap I_2$.

b) Se ϕ é solução maximal do PVI $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, definida em I, mostre que I é aberto.

c) Mostre que para cada $(t_0, x_0) \in D$, existe uma única solução máxima do PVI $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, definida num intervalo aberto.

Questão 7) Seja $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua satisfazendo

$$|f(t,x)| \leq h(t)|x| + b(t), \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n,$$

onde $h, b : [0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ são funções contínuas. Mostre que toda solução maximal do PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

está definida em $[0, +\infty)$.

Questão 8) Seja $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e suponha que exista uma função $\lambda \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que

$$\langle x, f(t,x) \rangle \leq \langle -\lambda(t)x, x \rangle,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$. Mostre que para todos $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, a solução do PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

existe para todo $t \in \mathbb{R}$ e satisfaz

$$|x(t)| \leq exp\left(- \int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds \right) |x_0| \quad \text{para} \quad t \geq t_0.$$

Discuta o comportamento das soluções para $\lambda(t) \geq 0$, $t \geq t_0$. O que ocorre se $\int_{t_0}^{+\infty} \lambda(s)ds = +\infty$?

Questão 9) Se $X = (X_1, \ldots, X_n)$ é um campo vetorial de classe C^1 em $\mathbb{R}^n$ e V é uma função real diferenciável em $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} X_i(x) \leq 0 \quad \text{e} \quad V(x) \geq |x|^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, mostre que toda solução de $\dot{x} = X(x)$ está definida para todo $t \geq 0$.

Definição: Seja f contínua em um domínio D de $\mathbb{R}^{n+1}$ com valores em $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $x(t)$, definida em $I \subset \mathbb{R}$, é uma solução $\epsilon-$aproximada para a equação $\dot{x} = f(t,x)$, se:

i) x é contínua em I;

ii) $(t, x(t)) \in D$ para todo $t \in I$;

iii) $\dot{x}(t)$ é contínua por partes em I, possuindo um número finito de descontinuidades $t_1, \ldots, t_k$;

iv) $|\dot{x}(t) - f(t, x(t))| \leq \epsilon$ para todo $t \in I \setminus \{t_1, \ldots, t_k\}$.

Questão 10) Seja $f(t,x)$ contínua no retângulo $R = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq \alpha, \ |x - x_0| \leq \beta\}$. Mostre que para todo $\epsilon > 0$, existe uma solução $\epsilon-$aproximada x_ϵ para o PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

definida em um intervalo I_ϵ satisfazendo a seguinte condição

$$\left| x_\epsilon(t) - x_\epsilon(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s, x_\epsilon(s)ds) \right| \leq \epsilon |t - t_0|,$$

para todo $t \in I_\epsilon$.

Questão 11) Seja $f : D \to \mathbb{R}^n$ contínua e lipschitz na segunda variável no aberto $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com constante de lipschitz $L > 0$. Sejam $x_i(t)$, $i = 1, 2$, soluções ϵ_i-aproximadas de equação $\dot{x} = f(t,x)$ em I_i e $t_0 \in I_1 \cap I_2$. Mostre que para todo $t \in I_1 \cap I_2$ tem-se

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq (|x_1(t_0) - x_2(t_0)| + (\epsilon_1 + \epsilon_2)|t - t_0|) \, e^{L|t - t_0|}.$$

Questão 12) Seja $f(t,x)$ contínua em $R_+ = \{(t,x) : t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha,\ x \in [x_0 - \beta, x_o + \beta]\}$. Suponha que f é decrescente em x para cada t fixado em $[t_0, t_0 + \alpha]$. Mostre que o PVI $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ admite uma única solução no intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Questão 13) Na Questão 12), podemos substituir a hipótese de f ser decrescente por crescente?

Questão 14) *a*) Seja $w(z)$ contínua e crescente no intervalo $[0, +\infty)$ tal que $w(0) = 0$, $w(z) > 0$ para $z > 0$ e

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^b \frac{dz}{w(z)} = +\infty,$$

para $0 < b \leq a$. Seja $u(t)$ uma função não negativa e contínua no intervalo $[0, a]$. Mostre que se

$$u(t) \leq \int_0^t w(u(s))ds, \quad 0 < t \leq a$$

então $u(t) = 0$ para todo $t \in [0, a]$.

b) Seja $f(t,x)$ contínua no retângulo $R = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq \alpha,\ |x - x_0| \leq \beta\}$ e suponha que

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq w(|x_1 - x_2|), \quad (t,x_1), (t,x_2) \in R,$$

onde w satisfaz as condições do item *a*). Mostre que o PVI $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ admite uma única solução no intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

c) Se $w(z) = \begin{cases} -z \ln z, & 0 \leq z \leq e^{-1} \\ e^{-1}, & z > e^{-1} \end{cases}$, então o PVI do item *b*) admite única solução no intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.