$3^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de Variáveis Complexas

Professora: Denise de Mattos **25/09/06**

1. Considere as funções hiperbólicas reais: $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ e $\mathrm{senh(x)} = \frac{\mathrm{e^x - e^{-x}}}{2}$. Dados $z, w \in \mathbb{C}$, mostre que se $x = \mathrm{Re(z)}$ e $y = \mathrm{Im(z)}$, então:

   a. $\cos(z) = \cos(x)\mathrm{cosh(y)} - \mathrm{isen}\,(\mathrm{x})\mathrm{senh(y)}$
   b. $\mathrm{sen}\,(z) = \mathrm{sen}\,(x)\mathrm{cosh(y)} + \mathrm{i}\cos(\mathrm{x})\mathrm{senh(y)}$
   c. $|\cos(z)|^2 = \cos^2(x) + \mathrm{senh}^2(\mathrm{y})$
   d. $|\mathrm{sen}\,(z)|^2 = \mathrm{sen}\,^2(x) + \mathrm{senh}^2(\mathrm{y})$
   e. $\cos(z) = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
   f. $\mathrm{sen}\,(z) = 0 \iff z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
   g. $\overline{\cos(z)} = \cos(\bar{z})$
   h. $\overline{\mathrm{sen}\,(z)} = \mathrm{sen}\,(\bar{z})$
   i. $\cos(-z) = \cos(z)$
   j. $sen(-z) = -\mathrm{sen}\,(z)$
   k. $\mathrm{sen}\,(z+w) = \mathrm{sen}\,(z)\cos(w) + \cos(z)\mathrm{sen}\,(w)$.
   l. $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \mathrm{sen}\,(z)\mathrm{sen}\,(w)$
   m. $\cos(z+2\pi) = \cos(z)$
   n. $\mathrm{sen}\,(z+2\pi) = \mathrm{sen}\,(z)$

   Sugestão: Ver demonstrações em *Zani*, pag. 32 a 35.

   Definição *A função tangente complexa é definida pela expressão:* $\mathrm{tg}\,(z) = \frac{\mathrm{sen}\,(z)}{\cos(z)}$.

2. Mostre que: $\mathrm{tg}\,(z) = -i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$ e que o seu domínio é o conjunto $\{z \in \mathbb{C}; z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

   Definição *As funções hiperbólicas complexas são definidas por:*

$$\mathrm{senh(z)} = \frac{\mathrm{e^z - e^{-z}}}{2}, \quad \mathrm{cosh(z)} = \frac{\mathrm{e^z + e^{-z}}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{tgh(z)} = \frac{\mathrm{senh(z)}}{\mathrm{cosh(z)}}.$$

3. Mostre que senh(z) e cosh(z) são periódicas de período $2\pi i$. Verique que os zeros do senh(z) são da forma $k\pi i$ e os zeros do cosh(z) são da forma $\frac{\pi}{2}i + k\pi i$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

4. Mostre que $\mathrm{tgh(z)} = \frac{\mathrm{e^z - e^{-z}}}{\mathrm{e^z + e^{-z}}}$ e que o seu domínio é o conjunto $\{z \in \mathbb{C}; z \neq i\frac{\pi}{2} + ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

5. Mostre que, para todo $z, w \in \mathbb{C}$:

   a. $\mathrm{cosh^2(z) - senh^2(z)} = 1$
   b. $\mathrm{senh(-z) = -senh(z)}$
   c. $\mathrm{cosh(-z) = cosh(z)}$
   d. $\mathrm{sen}\,(iz) = i\mathrm{senh(z)}$
   e. $\cos(iz) = \mathrm{cosh(z)}$
   f. $\mathrm{senh(2z) = 2senh(z)cosh(z)}$
   g. $\mathrm{cosh(z+w) = cosh(z)cosh(w) + senh(z)senh(w)}$
   h. $\mathrm{senh(z+w) = senh(z)cosh(w) + cosh(z)senh(w)}$

6. Mostre que:

   a. Se $z = re^{i\theta}$, então $\bar{z} = re^{-i\theta}$
   b. $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$
   c. $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$
   d. $(e^{iz})^2 = e^{2iz}$
   e. $(e^{-iz})^2 = e^{-2iz}$
   f. $(e^z)^n = e^{nz}$

7. Mostre que:

   a. $e^{2\pm 3\pi i} = -e^2$
   b. $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$

8. Mostre que $\forall z, w \in \mathbb{C} - \{0\} : \mathrm{Log(z.w) = Log(z) + Log(w)(mod\ 2\pi i)}$

9. Determine todos os valores de z tais que::

   a. $\cos(z) = \frac{1}{2}$ **b.** $\cos(z) = 4$ **c.** $e^z = -2$ **d.** $e^{2z-1} = 1$

10. Calcule:

    a. e^{2+i} **b.** $\mathrm{sen}\,(1+i)$ **c.** $\cos(2+3i)$

11. Encontre todos os valores de:

    a. Log(1) **b.** Log(i) **c.** $\mathrm{Log(-i)}$ **d.** $\mathrm{Log(1+i)}$
    e. $(-i)^i$ **f.** $(-1)^i$ **g.** 2^i **h.** $(1+i)^{1+i}$

12. Mostre pela definição que: $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{(\bar{z})^2}{z} = 0$.

13. Calcule $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ e verifique se f é contínua em z_0:

a. $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{iz^3-1}{z+i}$ **b.** $\lim\limits_{z\to 3i} \dfrac{z^2+9}{z-3i}$ **c.** $\lim\limits_{z\to 1+i} \dfrac{z^2+1}{z^3+1}$ **d.** $\lim\limits_{z\to -i} z\bar{z}$

e. $\lim\limits_{z\to i} (\bar{z})^2$ **f.** $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\mathrm{Re(z)}}{|z|+1}$ **g.** $\lim\limits_{z\to -2i} \dfrac{z^2+2(1+i)z+4i}{z+2}$ **h.** $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^2-(2+i)z+2i}{z-i}$

14. Mostre pela definição que a função $f(z)=\frac{1}{z}$ é contínua em todo ponto $z\neq 0$.

15. Determine os pontos onde $h(z)$ é diferenciável e calcule, se existir, $h'(z)$, quando $n\in\mathbb{Z}$ e $a,b\in\mathbb{C}$ são constantes.

a. $h(z)=(z-a)^n$ **b.** $h(z)=\frac{1}{(z-b)^n}$ **c.** $h(z)=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n$ **d.** $h(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$

16. Mostre que a função $f(z)=\mathrm{Re(z)}$ não possui derivada em nenhum ponto $z\in\mathbb{C}$.

17. Mostre que a função $f(z)=|z|$, definida para todo $z\in\mathbb{C}$ não é diferenciável em nenhum ponto $z_0\in\mathbb{C}$.

Sugestão: Verifique que $\forall(x,y)\neq(0,0)$ $\mathrm{Re}f(z)=u(x,y)$ e $\mathrm{Im}f(z)=v(x,y)$ não satisfazem Cauchy-Riemann e se $z_0=0$, mostre que não existe $f'(0)$.

18. Mostre que a função $f(z)=e^{|z|}$ não possui derivada em nenhum ponto $z\in\mathbb{C}$ e portanto não é analítica.

19. Mostre que a função $f(z)=\sqrt{|xy|}$ satisfaz as equações de Cauchy-Rieman em $z=0$, mas f não é diferenciável em $z=0$.

20. Mostre que a função $f(z)=z\mathrm{Re(z)}$ é diferenciável apenas em $z=0$ e calcule $f'(0)$.

21. Mostre que $f(z)=\frac{1}{z}$ não é analítica na bola aberta $B=\{z\in\mathbb{C};|z|<1\}$, mas é analítica em $B-\{0\}=\{z\in\mathbb{C};0<|z|<1\}$.

22. Verifique o conjunto dos pontos $z\in\mathbb{C}$ onde $f(z)$ é analítica e calcule $f'(z)$:

a. $f(z)=\mathrm{sen}\,(z)$ **b.** $f(z)=\cos(z)$ **c.** $\mathrm{tg}\,(z)=\frac{\mathrm{sen}\,(z)}{\cos(z)}$ **d.** $\mathrm{cotg}\,(z)=\frac{\cos(z)}{\mathrm{sen}\,(z)}$

e. $\mathrm{sec(z)}=\frac{1}{\mathrm{cos(z)}}$ **f.** $\mathrm{cossec(z)}=\frac{1}{\mathrm{sen\ (z)}}$ **g.** $f(z)=\mathrm{senh(z)}$ **h.** $f(z)=\mathrm{cosh(z)}$

i. $\mathrm{tgh(z)}=\frac{\mathrm{senh(z)}}{\mathrm{cosh(z)}}$ **j.** $\mathrm{cotgh(z)}=\frac{\mathrm{cosh(z)}}{\mathrm{senh(z)}}$ **k.** $\mathrm{sechz}=\frac{1}{\mathrm{cosh(z)}}$ **l.** $\mathrm{cossech(z)}=\frac{1}{\mathrm{senh(z)}}$

23. Seja $z=x+iy$. Mostre que a função $f(z)$ não é analítica em nenhum ponto do plano:

a. $f(z)=z-\bar{z}$ **b.** $f(x+iy)=2x+xy^2i$ **c.** $f(z)=e^{\bar{z}}$ **d.** $f(z)=x^2y+ix$

24. Mostre que $f(z)$ é analítica em $\mathbb{C}$ e calcule $f'(z)$.

a. $f(x+iy)=\mathrm{sen}\,(x)\mathrm{cosh(y)}+\mathrm{i}\cos\mathrm{(x)senh(y)}$ **b.** $f(x+iy)=\cos(x)\mathrm{cosh(y)}-\mathrm{isen\,(x)senh(y)}$

Sugestão: Mostre que $\mathrm{Re}f(z)$ e $\mathrm{Im}f(z)$ possuem derivadas parciais contínuas e satisfazem Cauchy-Riemann.

25. Determine se $f(z)$ é analítica no aberto A:

a. $f(z)=\frac{3+2z}{i+2z}$ e $A=\{z\in\mathbb{C};|z|<1\}$ **b.** $f(x+iy)=\cos(x)$ e $A=\{z\in\mathbb{C};|z|<1\}$

c. $f(x+iy)=e^{-y}[\cos(x)+i\mathrm{sen}\,(x)]$ e $A=\mathbb{C}$ **d.** $f(z)=\frac{P(z)Q(z)}{z}$ e $A=\{z\in\mathbb{C};0<|z|<1\}$

26. Explique por que a função $f(z)=2z^2-3-ze^z+e^{-z}$ é uma função inteira.

27. Mostre que a função e^{z^2} é uma função inteira e calcule $\frac{d}{dz}(e^{z^2})$.

28. Determine os pontos $z\in\mathbb{C}$ onde $h(z)$ é analítica e calcule $h'(z)$, se existir.

a. $h(z)=\mathrm{sen}\,(e^z)$ **b.** $h(z)=\frac{e^z}{z^2+3}$ **c.** $h(z)=\frac{1}{e^z-1}$ **d.** $h(z)=\cos(\bar{z})$

29. Seja $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$. Se $r[\cos(\theta)+i\mathrm{sen}\,(\theta)]$ denota a forma polar de z, então $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$. Mostre que as equações de Cauchy-Rieman em coordenadas polares são:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta},\ r\neq 0$$