$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de Variáveis Complexas

Professora: Denise de Mattos **17/08/06**

1. Determine e represente geometricamente as seguintes raízes:
   a. As raízes cúbicas de $z_0 = 1$. **b.** As raízes cúbicas de $z_0 = 1 + i$
   c. As raízes quadradas de $z_0 = i$ **d.** As raízes quadradas de $z_0 = -1$
   e. As raízes quartas de $z_0 = 2i$ **f.** As raízes cúbicas de $z_0 = \frac{-8}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{2}}i$
   g. As raízes quadradas de $z_0 = 3 - 4i$ **h.** As raízes quartas de $z_0 = -8 + 8\sqrt{3}i$

2. Resolva as equações:
   a. $w^3 = -64$. **b.** $w^2 = -16i$
   c. $w^2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. **d.** $w^2 = \frac{1}{-4i}$

3. Um quadrado inscrito em uma circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértices o afixo de $w = 3i$. Quais números complexos são representados pelos outros três vértices?

4. Represente geometricamente os números complexos $i + \sqrt[3]{-8i}$.

5. Uma das raízes de ordem 6 de um número complexo z_0 é $w = -2$. Determine as outras raízes de ordem 6 de z_0.

6. Determine as raízes da equação $w^4 + 4 = 0$ e use essas raízes para escrever o polinômio $w^4 + 4$ como produto de fatores de grau 2 com coeficientes reais.

7. Calcule:
   a. $\left(4\sqrt{3} - 4i\right)^{\frac{1}{3}}$. **b.** $\left(128 + 128\sqrt{3}i\right)^{\frac{1}{4}}$
   c. $\left(16\sqrt{2} + \frac{32}{\sqrt{2}}i\right)^{\frac{1}{5}}$ **d.** $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{\frac{1}{6}}$

8. Seja $w \neq 1$ uma raiz n-ésima da unidade qualquer. Usando a fórmula para a soma de uma série geométrica finita, mostre que para qualquer inteiro n não negativo, com $n \neq 1$:
$$1 + w + w^2 + \ldots + w^{n-1} = 0.$$

9. Mostre que toda bola aberta $B(z_{0;r})$ é um subconjunto aberto em $\mathbb{C}$.

   Definição: *Um subconjunto F de $\mathbb{C}$ é fechado em $\mathbb{C}$ se o seu complementar $\mathbb{C} - F$ é aberto em $\mathbb{C}$.*

10. Mostre que toda bola fechada $B[z_0; r]$ é um subonjunto fechado em $\mathbb{C}$.

    Definição: *Um subconjunto S de $\mathbb{C}$ é limitado quando todos os seus pontos estão a uma distância finita da origem, ou seja, existe $M > 0$ tal que $|z| < M$, para todo $z \in S$.*

11. Represente geometricamente cada um dos seguintes subconjuntos dos números complexos e determine o seu interior e a sua fronteira. Diga se são abertos, fechados (ou nenhum deles) e verifique quais são limitados.
    a. $\{z \in \mathbb{C}; |z-2| - |z+2| > 3\}$. **b.** $\{z \in \mathbb{C}; |z-2| + |z+2| = 5\}$
    c. $\{z \in \mathbb{C}; 0 < \mathrm{Arg}\left(\frac{z+i}{z-i}\right) < \pi/4\}$ **d.** $\{z \in \mathbb{C}; 0 \leq \mathrm{Re(iz)} < 1\}$
    e. $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re(z^2)} = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^+\}$ **f.** $\{z \in \mathbb{C}; \left|\frac{z+1}{z-1}\right| < 1\}$
    g. $\{z \in \mathbb{C}; \left|z^2 - 1\right| < 1\}$ **h.** $\{z \in \mathbb{C}; |z| + \mathrm{Re(z)} \leq 1\}$