$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1,$$

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2,$$

$$\operatorname{sen} z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \quad \text{e} \quad \cos z = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right).$$

As duas primeiras dessas identidades são conseqüências imediatas das definições de seno e co-seno, e as demais seguem dessas definições e das propriedades da função exponencial (Exercs. 4 a 7 adiante).

As funções hiperbólicas, seno e co-seno, são definidas, como no caso de variáveis reais, pelas seguintes expressões:

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Como se vê, seus valores são reais para valores reais de z. Elas surgem naturalmente quando se procura separar as partes real e imaginária das funções $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ (Exercs. 9 e 10 adiante). É fácil ver que $(\operatorname{senh} z)' = \cosh z$ e $(\cosh z)' = \operatorname{senh} z$.

EXERCÍCIOS

1. Mostre que os zeros de $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ são dados, respectivamente, pelas expressões $z = n\pi$ e $z = (n + 1/2)\pi$, n inteiro. Determine os domínios máximos de definição das funções $\operatorname{tg} z$, $\cot z$, $\sec z$ e $\csc z$.
2. Mostre que $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ são funções periódicas de período 2π, como no caso real.
3. Prove que $\cosh z$ e $\operatorname{senh} z$ são funções periódicas de período $2\pi i$.

Estabeleça as identidades dadas nos Exercs. 4 a 16.

4. $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.
5. $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$. *Sugestão*: comece pelo 2º membro.
6. $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$.
7. $\operatorname{sen} z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$ e $\cos z = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$.

8. $\operatorname{sen} iz = i \operatorname{senh} z$ e $\cos iz = \cosh z$.
9. $\operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$.
10. $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$.
11. $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$.
12. $|\operatorname{senh}(x + iy)|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y$ e $|\cosh(x + iy)|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \cos^2 y$.
13. $|\cosh(x + iy)|^2 - |\operatorname{senh}(x + iy)|^2 = \cos 2y$.
14. $\operatorname{senh}(z_1 + z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2$.
15. $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2$.
16. $\operatorname{senh}(z + i\pi) = -\operatorname{senh} z$; $\cosh(z + i\pi) = -\cosh z$; $\operatorname{tgh}(z + i\pi) = \operatorname{tgh} z$.
17. Prove que $|\operatorname{senh} x| \le |\cosh(x + iy)| \le \cosh x$.

O LOGARITMO

O *logaritmo* de um número complexo $z = re^{i\theta} \neq 0$, é definido assim:

$$\log z = \log r + i\theta,$$

onde $\log r$ denota o logaritmo real do número $r > 0$. O logaritmo está definido para todo número complexo $z \neq 0$, e se reduz ao logaritmo real quando $\theta = 0$. Usa-se também a notação $\ln z$.

Na realidade, a fórmula acima permite atribuir ao logaritmo vários valores distintos, dependendo do argumento usado para o número z. Por causa disso costuma-se dizer que o logaritmo é uma *função multivalente*.

2.18. Observação. É claro que o valor de uma função tem de ser determinado univocamente, de forma que a expressão "função multivalente", a rigor, é imprópria, mas é usada por ser conveniente: sabemos do que estamos falando. Em contraposição, para enfatizar, ou evitar qualquer dúvida, às vezes usa-se também a expressão "função univalente". Em breve encontraremos outros exemplos de "funções multivalentes" e veremos como torná-las univalentes.

As funções trigonométricas inversas

As funções inversas das funções trigonométricas exprimem-se facilmente em termos do logaritmo. Consideremos, por exemplo, a função

$$w = \arccos z,$$

definida por $z = \cos w$, ou seja

$$z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}.$$

Multiplicando por e^{iw}, reduzimos esta equação à forma

$$(e^{iw})^2 - 2z(e^{iw}) + 1 = 0,$$

donde

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1},$$

e, finalmente,

$$w = \arccos z = -i \log(z + i\sqrt{1 - z^2}).$$

Temos aqui uma função multivalente, cujos ramos particulares são obtidos considerando ramos particulares de $\sqrt{z^2 - 1}$ e do logaritmo que aí aparece.

A derivada da função $\arccos z$ pode ser calculada facilmente a partir da expressão acima, com a ajuda da regra da cadeia. Temos:

$$(\arccos z)' = -i\frac{(z + i\sqrt{1 - z^2})'}{z + i\sqrt{1 - z^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

As demais funções inversas, trigonométricas e hiperbólicas, são obtidas de maneira análoga.

Observamos que as notações $\cos^{-1} z$, $\operatorname{sen}^{-1} z$ etc. são freqüentemente usadas em lugar de $\arccos z$, $\operatorname{arc\,sen} z$ etc. Elas não devem ser confundidas com $(\cos z)^{-1}$, $(\operatorname{sen} z)^{-1}$ etc.

EXERCÍCIOS

1. Demonstre que $\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$, no sentido de igualdade de conjuntos de valores, como em (2.15).
2. Defina os ramos do logaritmo a partir de um corte ao longo do semi-eixo real negativo, $-\pi \le \theta < \pi$, e identifique as imagens do plano z pelos vários ramos obtidos.
3. Mostre que $\log(-1) = (2k+1)\pi i$ e $\log i = \frac{4k+1}{2}\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
4. Mostre que, sendo $x \neq 0$,

$$\log(x + iy) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + (\theta_0 + 2k\pi)i,$$

onde θ_0 é uma das determinações de $\operatorname{arctg}(y/x)$. Se $x = 0$, então $y \neq 0$ e θ_0 pode ser tomado igual a $\pm\pi/2$, conforme seja $y > 0$ ou $y < 0$, respectivamente.

Determine todas as raízes das equações dadas nos Exercs. 5 a 10.

5. $e^z = -1$;	6. $e^{2z} = -e$.	7. $e^z = -\sqrt{3} + 3i$.
8. $e^z + 6e^{-z} = 5$.	9. $e^{3z-4} = -1$.	10. $\log z = \pi i/2$.

11. Mostre que, uma vez fixado o argumento da constante $c \neq 0$, a função $w = c^z$ é analítica, com derivada $(c^z)' = c^z \log c$.
12. Estabeleça as seguintes propriedades das potências:

$$z^a z^b = z^{a+b}, \quad z^{-a} = \frac{1}{z^a}, \quad (z^a)^b = z^{ab},$$

onde $z \neq 0$ e a e b são números complexos quaisquer.

13. Demonstre que $|z^r| = |z|^r$, onde $z \neq 0$ e r é um número real qualquer.
14. Mostre que todas as determinações de i^i são reais e dadas por

$$i^i = \exp\frac{-(4k+1)\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ld$$

15. Calcule todas as determinações das seguintes potências:

$$(1+i)^i; \quad (1-i)^i; \quad (\sqrt{3}+i)^i; \quad (1-i\sqrt{3})^i.$$

16. Mostre que $\operatorname{arc\,sen} z = -i\log(iz + \sqrt{1 - z^2})$, e que $(\operatorname{arc\,sen} z)' = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$.
17. Mostre que $\operatorname{arc\,tg} z = \frac{i}{2}\log\frac{i+z}{i-z}$, e que $(\operatorname{arc\,tg} z)' = \frac{1}{1+z^2}$.
18. Determine todas as raízes da equação $\cos z = 3$.
19. Determine todas as raízes da equação $\operatorname{sen} z = 3$.