função composta ou derivação em cadeia: se $g$ é derivável no ponto $z$ e $f$ é derivável no ponto $g(z)$, então $f(g(z))$ é derivável no ponto $z$ e

$$\frac{d}{dz}f(g(z)) = f'(g(z))g'(z).$$

Todos esses teoremas e outros mais se demonstram como no caso de variáveis reais. A título de ilustração, vamos demonstrar que *se uma função $f$ é derivável num ponto $z_0$, então $f$ é contínua nesse ponto.*

Como $f$ é derivável no ponto $z_0$, a expressão

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) = g$$

tende a zero com $z \to z_0$. Em conseqüência, o último termo da expressão

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)f'(z_0) + (z-z_0)g$$

tende a zero com $z \to z_0$. Como o penúltimo termo também tende a zero, passando ao limite obtemos o resultado desejado: $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Chama-se *função inteira* a toda função que é analítica em todo o plano. Os polinômios são os exemplos mais simples de funções analíticas. Eles são funções inteiras. A seguir vêm as funções racionais, definidas como o quociente de dois polinômios. Estas são analíticas em todos os pontos que não anulam o denominador. Por exemplo, a função

$$f(z) = \frac{(z+2)(3z-1)^2}{z(z-3)(z+i)^2}$$

é analítica em todo o plano, excetuados os zeros do denominador, isto é, $z = 0,\ 3,\ -i$.

## EXERCÍCIOS

1. Prove que a soma de um número finito de funções analíticas é analítica e a derivada da soma é a soma das derivadas das parcelas.
2. Prove que o produto de duas funções analíticas $f$ e $g$ é função analítica, com derivada $(fg)' = f'g + fg'$. Prove, por indução, a regra de derivação de Leibniz:

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + nf^{(n-1)}g' + \frac{n(n-1)}{2}f^{(n-2)}g'' + \ldots + fg^{(n)} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f^{(n-j)}g^{(j)}$$



3. Prove que o quociente de duas funções analíticas $f$ e $g$ num ponto $z$, onde $g(z) \neq 0$, é função analítica e $(f/g)' = (gf' - fg')/g^2$.
4. Estabeleça a regra de derivação da função composta, ou regra da cadeia: *se $g$ é derivável no ponto $z$ e $f$ é derivável no ponto $g(z)$, então $f(g(z))$ é derivável no ponto $z$ e* $\frac{d}{dz}f(g(z)) = f'(g(z))g'(z)$.

Calcule as derivadas das funções dadas nos Exercs. 5 a 7.

5. $f(z) = 1 - z^2 + 4iz^5$; 6. $f(z) = (z^2 - i)^3(iz+1)^2$; 7. $f(z) = \dfrac{z-3i}{z+3i}$.

8. Prove, por indução, que $(z^n)' = nz^{n-1}$, para todo inteiro positivo $n$.
9. Prove que $(z^n)' = nz^{n-1}$ vale também para os inteiros negativos $n$.
10. Sendo $z \neq 0$, prove que $(1/z)' = -1/z^2$.
11. Prove, por indução, que

$$\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{z} = \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}.$$

## SUGESTÕES

10. É preciso provar que a expressão

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{z+h} - \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z^2} = \frac{h}{z^2(z+h)}$$

tende a zero com $h \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$, é preciso encontrar $\delta > 0$ etc. Observe que $|z+h| \geq |z| - |h| > |z|/2$, desde que se tome $|h| < |z|/2$.

## AS EQUAÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN

Seja $f = u + iv$ uma função derivável num ponto $z = x + iy$. Então, o quociente

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

tem limite $f'(z)$ com $\Delta z \to 0$, independentemente do modo como $\Delta z$ tende a zero. Em particular, podemos fazer $\Delta z$ tender a zero por valores reais $\Delta z = k$ e, separadamente, por valores imaginários $\Delta z = it$ (Fig. 2.8). Obtemos, respectivamente,

$$f'(z) = \lim_{k\to 0}\frac{u(x+k,\, y) - u(x,\, y) + i[v(x+k,\, y) - v(x,\, y)]}{k}$$