Se todos os coeficientes a_n se anulam, então f se anula em toda a vizinhança $|z - z_0| < r$. Excluído este caso, deve existir $m > 0$ tal que a_m seja o primeiro coeficiente não-nulo em (4.24), isto é,

$$a_0 = \ldots = a_{m-1} = 0 \quad \text{e} \quad a_m \neq 0.$$

Dizemos, então, que z_0 é um *zero de ordem* m da função f. Fatorando $(z - z_0)^m$ no desenvolvimento anterior, obtemos:

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n}(z - z_0)^n.$$

Pondo

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n}(z - z_0)^n, \tag{4.25}$$

concluímos que se z_0 é um zero de ordem m da função f, então, numa vizinhança de z_0,

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \text{e} \quad g(z_0) \neq 0. \tag{4.26}$$

Reciprocamente, suponhamos que exista uma função g satisfazendo a relação (4.26) numa vizinhança $|z - z_0| < r$ de z_0. A função g possui, nessa vizinhança, desenvolvimento de Taylor do tipo (4.25), que, substituído em (4.26), nos dá o desenvolvimento (4.24) com $a_0 = \ldots = a_{m-1} = 0$, $a_m \neq 0$. Fica assim demonstrado o seguinte teorema.

4.24. Teorema. *Uma condição necessária e suficiente para que z_0 seja um zero de ordem m da função f é que exista g satisfazendo a relação (4.26); ou ainda, que $(z - z_0)^{-m} f(z)$ tenha limite finito e diferente de zero com $z \longrightarrow z_0$.*

Se uma função f é regular no ponto $z = \infty$, este ponto é chamado um *zero de ordem m* de $f(z)$ se $\zeta = 0$ é um zero de ordem m de $f(1/\zeta)$. É fácil ver que isto é equivalente a dizer que f possui desenvolvimento

$$f(z) = \frac{a_m}{z^m} + \frac{a_{m+1}}{z^{m+1}} + \ldots, \quad a_m \neq 0,$$

válido numa vizinhança $|z| > K$ do infinito.

EXERCÍCIOS

1. A série de Laurent costuma ser escrita na forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R. \tag{4.27}$$

(Deve-se entender então que temos aqui duas séries separadamente convergentes, uma que é a soma de $n = 0$ a $n = \infty$ e a outra a soma de $n = -1$ a $n = -\infty$.) Demonstre que, se essa série converge na região indicada, então a convergência é uniforme para $a \leq |z - z_0| \leq b$, quaisquer que sejam a e b, com $r < a < b < R$.

2. Demonstre que a série de Laurent é única, desde que fixados o ponto z_0 e a região onde ela é considerada. *Sugestão:* Multiplique (4.27) por $(z - z_0)^{-k-1}$ e integre termo a termo ao longo de um contorno C conveniente.

Nos Exercs. 3 a 8, obtenha as séries de Laurent das funções dadas, nas situações indicadas.

3. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 1$, $0 < |z - 1| < 1$.
4. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 1$, $|z - 1| > 1$.
5. $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)(z-2)}$, $z_0 = 2$, $0 < |z - 2| < \sqrt{5}$.
6. $f(z) = \dfrac{z^5}{z-1}$, $z_0 = 0$, $|z| > 1$.
7. $f(z) = z^5 e^{1/z}$, $z_0 = 0$, $|z| > 0$.
8. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{(z-\pi)^3}$, $z_0 = \pi$, $z \neq \pi$.
9. Seja f uma função regular no ponto z_0. Mostre que z_0 é um zero de ordem m de f se e somente se

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Determine a ordem do zero $z = 0$ das funções dadas nos Exercs. 10 a 15.

10. $(\cos z - 1)^3 \operatorname{sen} z$.
11. $\dfrac{(1 - \cos z)\operatorname{sen}^2 z}{1 - e^z}$.
12. $(e^z - 1 - z)^3 \operatorname{sen}^2 z$.
13. $e^{\operatorname{sen} z} - e^z$.
14. $(e^{z^2} - 1)(\operatorname{sen} z^2 - z^2)$.
15. $e^{\operatorname{sen} z} - e^{\operatorname{tg} z}$.

Determine os zeros e as respectivas ordens das funções dadas nos Exercs. 16 a 18.

16. $z^2 \operatorname{sen} z$.
17. $(\cos z - 1)\log(1 + z)$.
18. $(z^2 - 4)^2(e^z - 1)$.