Isto completa a demonstração.

4.22. Exemplo. Seja desenvolver em série de potências de z a função inteira $f(z) = e^{\operatorname{sen} z}$. Usando a regra de multiplicação e o Teorema de Weierstrass, obtemos:

$$e^{\operatorname{sen} z} = 1 + \operatorname{sen} z + \frac{\operatorname{sen}^2 z}{2!} + \frac{\operatorname{sen}^3 z}{3!} + \dots$$

$$= 1 + \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right) + \frac{1}{2!}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right)^3 + \dots$$

$$= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{3!}\right) z^3 + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) z^4 + \dots,$$

ou seja,

$$e^{\operatorname{sen} z} = 1 + z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{8} + \dots$$

Esta expressão nos mostra, em particular, que as funções $e^{\operatorname{sen} z}$ e e^z coincidem até segunda ordem com $z \to 0$:

$$e^{\operatorname{sen} z} - e^z = O(z^3), \quad z \to 0.$$

EXERCÍCIOS

Obtenha os desenvolvimentos em séries de potências de z dados nos Exercs. 1 a 4, e verifique que eles são válidos para todo z.

1. $\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.

2. $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$.

3. $\operatorname{senh} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

4. $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

Desenvolva em séries de potências de z as funções dadas nos Exercs. 5 a 7, cujos ramos são fixados pelas condições $\arccos 0 = 1$, $\operatorname{arc\,tg} 0 = 0$ e $\sqrt[3]{1} = 1$.

5. $\arccos z$.

6. $\operatorname{arc\,tg} z$.

7. $\frac{1+z}{\sqrt[3]{1-z^2}}$.

8. Desenvolva em série de potências de $z - 1$ a determinação principal ($\log 1 = 0$) de $f(z) = z \log z - z$.

9. Desenvolva em série de potências de z e $(z-2)$, respectivamente, as funções
$$f(z) = \frac{1}{(4-z)^3} \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{1}{z^5}$$
e represente graficamente seus discos de convergência.

10. Desenvolva em séries de potências de z as funções
$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{z}{(z+i)^2(z-1)}.$$

11. Mostre que $\operatorname{sen} z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+j}}{(2j+1)!}(z - n\pi)^{2j+1}$, onde n é um inteiro qualquer.

12. Obtenha o desenvolvimento de $\cos z$ em potências de $(z - n\pi - \pi/2)$, onde n é um inteiro.

13. Diz-se que uma função f é *par* (*ímpar*) se $f(z) = f(-z)$ ($f(z) = -f(-z)$) para todo z. Demonstre que o desenvolvimento de uma função par (ímpar) em potências de z só contém potências pares (ímpares).

14. Ao fazer o produto de duas séries de potências (4.17), em geral elas têm raios de convergência distintos. Mostre que o raio de convergência da série produto (4.18) é no mínimo o menor dos raios de convergência das séries (4.17). Dê exemplos de séries de potências cujo produto seja uma série com raio de convergência igual ao menor dos raios de convergência das séries dadas; e exemplos em que o produto seja uma série com raio de convergência maior que o menor dos raios de convergência das séries dadas, ou mesmo tenha raio de convergência infinito.

15. Obtenha os primeiros quatro termos do desenvolvimento de $z/(e^z - 1)$ em potências de z. Mostre que
$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} - 1 + \frac{z}{2}$$
é função par, significando que a função dada pode ser escrita na forma
$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n,$$
onde $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$ e $B_{2n+1} = 0$ para $n \geq 1$. Esses B_n são os chamados *números de Bernoulli* (Jacques Bernoulli (1654-1705)).

16. Mostre que $\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\coth\frac{z}{2}$ e conclua que $\frac{z}{2}\coth\frac{z}{2} = \sum_{0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$. Substituindo z por $2z$, obtém-se $z \coth z = \sum_{0}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$.

17. Mostre que, para $|z| < 1$,
$$\exp\left(\frac{1}{1-z}\right) = e + ez + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)\dots(k+n)}{k!}\right] z^n.$$

18. Determine os três primeiros termos do desenvolvimento

$$\log \cos z = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n,$$

tomando $\log 1 = 0$.

19. Sejam f uma função analítica numa região R, $z_0 \in R$ e r o raio de um disco centrado em z_0 e todo contido em R. Mostre que os coeficientes $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ da série de Taylor da função f relativa ao ponto z_0 são tais que $|a_n| \leq M/r^n$, onde M é o máximo de $|f(z)|$ em $|z - z_0| = r$.

SUGESTÕES

9. Observe que $f(z) = (1/4^3)/(1 - z/4)^3$ e aplique o desenvolvimento binomial; ou desenvolva $1/(4 - z)$ em potências de z e derive duas vezes. Quanto a $g(z)$, proceda de modo análogo, escrevendo $z = 2 + (z - 2)$.

10. Use decomposição em frações simples.

18. Observe que $\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ e $\cos z = 1 + (\cos z - 1)$.

SÉRIE DE LAURENT

Vimos, no caso da série de Taylor, que é sempre possível desenvolver em série de potências de $z - z_0$ uma função que seja regular em z_0. Veremos agora que o desenvolvimento pode ainda ser possível, mesmo que a função não seja regular em z_0, desde que se admitam potências com expoentes negativos. Um exemplo dessa situação é dado por

$$\frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \sum \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-3}}{n!} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \frac{z^3}{5!} + \ldots$$

Esse tipo de série, conhecido como *série de Laurent*, é uma generalização da série de Taylor. O resultado geral é dado pelo teorema seguinte.

4.23. Teorema. *Seja f uma função univalente e analítica numa região anular G: $r < |z - z_0| < R$. Então, para todo z nesta região,*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad (4.20)$$

onde os coeficientes a_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \qquad (4.21)$$

sendo C um contorno fechado em G, envolvendo z_0 uma vez no sentido positivo.

Demonstração. Dado $z \in G$, sejam r_1 e r_2 tais que $r < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R$ (Fig. 4.5). Designemos por C_1 e C_2 os círculos de centro z_0 e raios r_1 e r_2, respectivamente, orientados no sentido positivo. Ligando C_1 e C_2 por um arco L, obtemos um contorno fechado $\gamma = C_2 + L - C_1 - L$, numa região de regularidade da função f; logo, pela fórmula de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

As integrais ao longo de L e $-L$ se cancelam mutuamente; portanto,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \qquad (4.22)$$

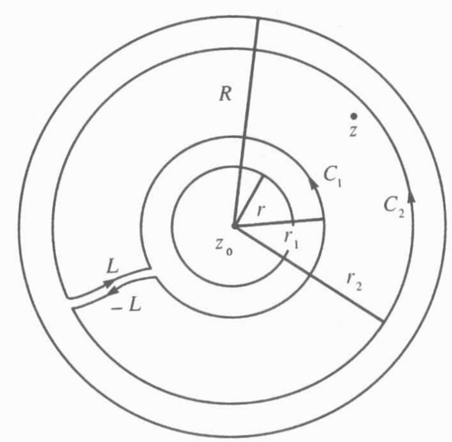

Fig. 4.5

A primeira destas integrais é tratada exatamente como no caso da série de Taylor (Teorema 4.14) e resulta na série de potências positivas que