Lista de transformaçãoes lineares, núcleo e imagem

SME141 – Álgebra Linear e Equações Diferenciais.

1) Resolva todos os exercícios do capítulo 5 da apostila.

2) Seja $T : V \to W$ uma função, em que V e W são espaços vetoriais de dimensão finita com escalares reais. Determine se as afirmações são verdadeiras ou falsas.

a) Se T é linear, então T preserva somas e produtos por escalar.
b) Se $T(x + y) = T(x) + T(y)$ então T é linear.
c) T é injetora se e somente se $\ker T = \{0\}$.
d) Se T linear, então $T(0) = 0$.
e) Se $T : V \to W$ é linear então $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim W$
f) Se T é linear, então T leva conjuntos L.I. em conjuntos L.I.
g) $T, U : V \to W$ são ambas lineares e coincidem em uma base de V, então $T = U$
h) Dados $x_1, x_2 \in V$, $x_1 \neq x_2$ e $y_1, y_2 \in W$, existe T linear tal que $T(x_1) = y_1$ e $T(x_2) = y_2$

3) Para cada operador linear abaixo, encontre bases para o núcleo e a imagem, cheque o resultado do teorema do núcleo e da imagem e determine se T é bijetora.

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(a, b, c) = (a - b, 2c)$.
b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(a, b) = (a + b, 0, 2a - b)$
c) $T : M_{2\times3}(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $T\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b & c + 2b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
d) $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, $T(p(t)) = tp(t) + p'(t)$.
e) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $T(M) = \operatorname{tr} M$, onde $\operatorname{tr} M$ é o traço da matriz, ou seja, a soma dos elementos da diagonal principal.

4) Seja $P(\mathbb{R})$ o conjunto dos polinômios. Mostre que $T : P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ dada por

$$T(p) = \int_0^t p(s)ds$$

é injetora mas não é sobre.

5) Dê exemplos de transformações lineares $T : V \to W$ e $U : V \to W$ tais que $\ker T = \ker U$ e $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} U$, mas $T \neq U$.

6) Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e $T : V \to W$ linear.

a) Prove que se $\dim V < \dim W$ então T não pode ser sobre.
b) Prove que se $\dim V > \dim W$ então T não pode ser injetora.
c) Prove que V é isomorfo a W se e somente se $\dim V = \dim W$.

7) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Descreva geometricamente as possibilidades para o núcleo de T.

Gabarito

2) a) V b) F. (Uma explicação pouco convincente: se fosse só isso para a transformação ser linear, os textos não ensinariam que é necessário também que $T(\alpha x) = \alpha T(x)$). Existem contra-exemplos onde falha

$T(\alpha x) = \alpha T(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, mas é difícil exibir um :-). Se está curioso, leia mais abaixo no rodapé[1] c) V d) V e) F f) F, tome $T = 0$ g) V h) F, tome $x_2 = 2x_1$, $y_1 = y_2 \neq 0$

3) a) $B_{\ker T} = \varnothing, \operatorname{Im} T = \mathbb{R}^3, T$ é injetora. b) $B_{\ker T} = \varnothing, B_{\operatorname{Im} T} = \{(1,0,0),(0,0,1)\}, T$ é injetora. c) $B_{\ker T} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}$ não é injetora, $B_{\operatorname{Im} T} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}$, d) $T(a+bt+ct^2) = b + (a+2c)t + bt^2 + ct^3, B_{\ker T} = \varnothing$ (é injetora), $B_{\operatorname{Im} T} = \left\{t, 1+t^2, 2t+t^3\right\}$ e) $B_{\ker T} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}, B_{\operatorname{Im} T} = \{1\}$

4) A integral de um polinômio é polinômio e a integral é linear. O núcleo é $\{0\}$ mas é fácil ver que $q(0) = 0$ se q está na imagem de T, e há polinômios que não zeram em $t = 0$

5) $V = W = \mathbb{R}$, $T(x) = 1$, $U(x) = 2$; $V = W = \mathbb{R}^3$, $Te_1 = Ue_1 = 0$, $Te_2 = Ue_3 = e_1$, $Te_3 = Ue_2 = e_2$

6) a) Pelo Teorema do núcleo e da imagem, $\dim \operatorname{Im} T \leqslant \dim V < \dim W$ e portanto $\operatorname{Im} T$ não coincide com W. b) $\dim \operatorname{Im} T \leqslant \dim W < \dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T \implies \dim \ker T > 0$. c) ($\Rightarrow$) Pelos itens a) e b), se existe um isomorfismo entre V e W (transformação linear bijetora), então só pode ocorrer $\dim V = \dim W$. ($\Leftarrow$) Seja $n = \dim V = \dim W$. Sejam $B_V = \{v\}_1, \ldots, v_n$ e $B_W = \{w\}_1, \ldots, w_n$ bases de U e W e seja $T : V \to W$ dada por $Tv_i = w_i$, $i = 1, \ldots, n$. T é sobre pois B_W também gera $\operatorname{Im} T$, e pelo teorema do núcleo e da imagem, $\ker T = \{0\}$.

7) Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, como a imagem é um subespaço de $\mathbb{R}$, só pode ser $\{0\}$ ($dim = 0$) ou $\mathbb{R}$ ($dim = 0$), então a dimensão do núcleo é 3 ou 2. Se é 3, $\ker T = \mathbb{R}^3$. Se é 2, então $\ker T$ é gerado por dois vetores L.I. em $\mathbb{R}^3$, o que é um plano que passa pela origem.

---

[1] *Exemplo de função $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $T(x+y) = T(x) + T(y)$ mas não vale que $T(\alpha x) = \alpha T(x)$, $\forall \alpha, x \in \mathbb{R}$, ou seja, T não é linear.* Se $T(x+y) = T(x) + T(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, é fácil ver que $T(nx) = nT(x)$, $n \in \mathbb{Z}$. De fato é fácil mostrar que $T(qx) = qT(x)$, $q \in \mathbb{Q}$ (exercício). Considerando escalares em $\mathbb{Q}$ (o que pode ser feito, pois $\mathbb{Q}$ é um corpo), $\mathbb{R}$, como conjunto, é um espaço vetorial (de dimensão infinita!). Denotemos este espaço vetorial como $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$. $\sqrt{2}$ é irracional e portanto o conjunto $\left\{1, \sqrt{2}\right\}$ é LI em $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ (este foi o truque, pois $\left\{1, \sqrt{2}\right\}$ é LD em $\mathbb{R}$, que tem dimensão 1 com escalares reais). Complete uma base B de $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ a partir de $\left\{1, \sqrt{2}\right\}$. Defina $T(1) = 1$ e $T(v) = 0$ para todo $v \in B$, $v \neq 1$. Esta T é linear com escalares em $\mathbb{Q}$ e portanto aditiva (isto é, $T(x+y) = T(x) + T(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$), mas não é linear com escalares em $\mathbb{R}$, pois $0 = T(\sqrt{2}) \neq \sqrt{2}T(1) = \sqrt{2}$.