Resposta dos exercícios da 2ª lista

Caso encontre algum erro nesta lista de respostas, por favor escreva para o Prof. Miguel Frasson no e-mail `mvsfrasson@gmail.com`.

1) Respostas dos exercícios do Capítulo 2 da apostila, na página 63.

1. (a) $y(t) = -(t^3 + \cos t + K)^{-1}$. (b) $y(t) = \pm\sqrt{t^2 + k}$. (c) $y(t) = \pm\sqrt[4]{2t^3 + k}$.
(d) $\dfrac{y}{(1+y^2)^2} = K\sqrt{1+t^2}$. (e) $z(t) = \dfrac{6x}{1-kx^6}$. (f) $y(t) = -\dfrac{1}{\operatorname{sen} t + C}$.
(g) $\arctan y = \arctan x + C$ ou $y(t) = \dfrac{x+D}{1-xD}$. (h) $z = \pm x\sqrt{Kx^2+1}$.

2. (a) $y(t) - \dfrac{1}{t^3 + cost - 2}$. (b) $y(t) = -\dfrac{1}{\operatorname{sen} t + 1}$. (c) $y(t) = -\dfrac{1}{x}$. (d) $y(t) = \sec t$.

3. (a) $y(t) = Ct^2$. (b) $y(t) = C\sec t$. (c) $y(t) = \operatorname{sen} t + Ce^{-t}$.
(d) $y(t) = \cos(t)\ln(\sec t + \tan t) + 1 + C\cos t$. (e) $y(t) = e^t(t^4 + 3t^3 + 3t^3) + Ct^2$.
(f) $y(t) = t^3 + Ct^2$. (g) $z(t) = \Big(\dfrac{t^2}{2} + K\Big)e^{-t^2}$. (h) $y(t) = 1 + C\dfrac{1}{e^{e^t}}$.

4. (a) $y(t) = \dfrac{\ln t}{t} - \dfrac{1}{3t} + \dfrac{t^2}{3}$. (b) $y(t) = t + 5\sqrt{1+t^2}$. (c) $y(t) = \cos t + \dfrac{1}{2\operatorname{sen} t}$
(d) $y(t) = \dfrac{\frac{4}{3}t^3 - 8t + K}{t-2}$.

5. (a) $a(x^2+y^2) + bxy = C$. (b) $xe^y + \operatorname{sen} x = C$. (c) $e^x \cos y = C$.
(d) $\ln|x| - \dfrac{y^2}{x} = C$.

6. (a) Já é exata.
(b) $\mu(x) = 1/x^2$ e as curvas integrais são dadas por $V(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2} - \ln|x| = C$.

7. $y = -2e^{3x}$

8. $P(h) = P_0 \exp\Big(-\dfrac{h\ln 2}{6000}\Big)$.

9. $t = 24\ \ln(10)$ h ~ 55.262 h

10. (a) $t = 40$min. (b) $248g/l$.

2) (a) $y(t) = \sqrt{5(t+\sqrt{t^2+1})e^{t\sqrt{t^2+1}}}$.

Obs.: Para chegar à resposta, usamos as relações abaixo

$$y(t) = \sqrt{5}e^{A(t)} \quad \text{em que} \quad A(t) = \int_0^t \sqrt{t^2+1} = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{arcsenh} t + t\sqrt{t^2+1}\Big).$$

$$\text{Se } \theta = \operatorname{arcsenh} t \Leftrightarrow t = \operatorname{senh}\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}, \text{ então } e^{\operatorname{arcsenh} t} = e^\theta = t + \sqrt{t^2+1}.$$

(b) $y(t) = 0$.

(c) $y(t) = e^{-t^2/2} \int_0^t e^{s^2/2}(1+s)\,ds.$

Nota: a integral $\int e^{t^2/2}(1+t)\,dt$ não admite uma expressão em termos de funções elementares; isto ilustra que nem sempre é possível obtermos uma resposta explícita (isto é, em termos de funções elementares) para as soluções.

3) $y(t) = e^{-at} b \int e^{(a-c)t} dt = \begin{cases} e^{-at}(bt + C), & a = c, \\ \frac{b}{a-c}\, e^{-ct} + Ce^{-at}, & a \neq c. \end{cases}$ Logo $y(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

4) $y(t) = \begin{cases} 2(1 - e^{-t}), & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 2(e-1)e^{-t}, & t > 1. \end{cases}$

5) (a) Pode-se resolver por dois métodos: 1) usando-se $\mu(y) = 1/y$ como fator integrante (equações exatas; mais fácil) ou 2) usando-se o método da Observação 2.2, página 44 da apostila, pois a equação diferencial pode ser escrita na forma $y' = F(y/t)$.
As curvas integrais são dadas por $t + ye^{t/y} = C$.

(b) A equação diferencial pode ser escrita na forma $y' = F(y/t)$. As curvas integrais são dadas por

$$\arctan \frac{y}{t} + \ln \sqrt{y^2 + x^2} = C.$$

(c) A equação diferencial pode ser escrita na forma $y' = F(y/t)$. A solução y é dada implicitamente por

$$\frac{1}{\sqrt{y/x}} + \sqrt{y/x} = -\frac{\ln x + C}{2},$$

ou seja,

$$y = \frac{x}{16}\left(-(\ln x + C) \pm \sqrt{(\ln x + C)^2 - 16}\right)^2.$$

6) A equação diferencial pode ser escrita na forma $y' = F(y/t)$. A solução do PVI é

$$y(t) = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

7) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{C}{x}.$

8) $a = 1$ e as curvas integrais são dadas por $x + e^{-x} \operatorname{sen} y = C$, isto é,

$$y = \operatorname{arcsen}\big((C - x)e^x\big).$$

9) (a) Houve um erro de digitação. O exercício correto seria com a equação

$$x + ye^{2xy} + axe^{2xy}y' = 0.$$

Neste caso, $a = 1$ e as curvas integrais são dadas por

$$\frac{x^2 + e^{2xy}}{2} = C, \quad \text{ou seja,} \quad y = \frac{\ln(2C - x^2)}{2x}.$$

(b) $a = 1$ e as curvas integrais são dadas por $e^{x+y} + x^3y^2 = C$.

10) $f(x) = -2\cos x + D$, para $D \in \mathbb{R}$ e as soluções são dadas por

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{2C}{f(x)}}$$

11) Fixando $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $x_0 \neq 0$, por este ponto passa a curva $y = (x_0y_0)/x$, cuja reta tangente t tem inclinação $m_t = -y_0/x_0$. A nova família de curvas, para ser ortogonal à primeira, em cada ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, deve ter reta tangente com coeficiente angular $m_o = -1/m_t = x_0/y_0$. Esta forma vale (está definida e condiz com a realidade) mesmo quando $x_0 = 0$. Isto caracteriza a equação diferencial

$$y' = \frac{x}{y},$$

cuja solução é

$$y^2 - x^2 = C,$$

outra família de hipérboles.