SME 341 & SLC609
Assunto: Equações Diferenciais Ordinárias

Aula EDO-4 – EDOs de 1ª ordem separáveis (15 min)

Prof. Miguel Frasson

Maio 2020

EDOs separáveis

- As EDOs chamadas "separáveis" são relativamente fáceis. Veremos que a dificuldade são as integrais que podem aparecer, mas isso não tem a ver com o método de resolução, que é simples.
- Suponha que temos uma **EDO de 1ª ordem** com função incógnita $y(t)$.
- Reescrevemos a EDO omitindo a notação (t).
- Exemplo de reescrita:
$y'(t) = ay(t) + e^t(y(t))^2 \quad \to \quad y' = ay + e^t y^2$

EDOs separáveis

- As EDOs separáveis são EDOs de 1ª ordem em que as que "separar" as variáveis na forma

$$g(y)y' = h(t),$$

onde, no primeiro membro, aparece y' multiplicado por uma função que depende apenas de y

Exemplos

1. Todas as EDOs onde t não aparece explicitamente são separáveis. Essas EDOs chamam-se autônomas.
   $\rightarrow$ Basta passar dividindo os termos com y:
   - Vel. reação química: $y' = k(a-y)(b-y)$
   $$\frac{y'}{(a-y)(b-y)} = k, \qquad g(y) = \frac{1}{(a-y)(b-y)}, \quad h(t) = k.$$
   - Lei de Malthus: $y' = ky$
   $$\frac{y'}{y} = k, \qquad g(y) = \frac{1}{y}, \quad h(t) = k.$$
   - Lei de Verhulst: $y' = ay - by^2$
   $$\frac{y'}{y(a-by)} = 1, \qquad g(y) = \frac{1}{y(a-by)}, \quad h(t) = 1.$$

Exemplos

2. Todas as EDOs lineares de 1ª ordem **homogêneas** são separáveis:

$$y' + a(t)y = 0 \implies \frac{y'}{y} = -a(t)$$

3. Todas as EDOs lineares de 1ª ordem **não homogêneas** (não autônomas) NÃO são separáveis:

   $y' + a(t)y = b(t) \quad \rightarrow$ não dá para separar em $g(y)y' = h(t)$

4. Dúvida: mas $x' + x = t$ não está separada, já que todo x está no 1º membro?
   Resposta: Não basta estar todo x no 1º membro, tem que ser x' **multiplicando** uma expressão só com x.

Resolvendo uma EDO separável

Dedução do método

- $g(y)y' = h(t)$
- Lembre que y depende de t

$$g(y(t))y'(t) = h(t)$$

- Integre por partes em t ($u = y(t)$, $du = y'(t)dt$)

$$\int g(\underbrace{y(t)}_{u})\underbrace{y'(t)dt}_{du} = \int h(t)dt$$

$$\int g(u)du = \int h(t)dt$$

$G(u) = \int g(u)du$, $H(t) = \int h(t)dt$, desfazendo a mudança

$$G(y(t)) = H(t) + C$$

Resolvendo uma EDO separável

Dedução do método

- $G(y) = H(t) + C$
  define y em função de t **implicitamente** para cada valor do parâmetro C
- **Condições iniciais** determinam valores para C:
  se impomos $y(t_0) = y_0$, substituindo:

$$G(y_0) = H(t_0) + C \implies C = G(y_0) - H(t_0)$$

- (OPCIONAL) Se for possível inverter a função G, isto é, "isolar y", podemos encontrar uma expressão para $y(t)$

Resolvendo uma EDO separável

Resumo do método

- Partindo da EDO separável
$$g(y)y' = h(t)$$
- Integre em y no 1º membro (y' torna-se dy) e em t no 2º membro
$$\int g(y)dy = \int h(t)dt$$
- Solução implícita: $G(y) = H(t) + C$

Exemplo 1 – com integral indefinida

- Vamos resolver o Problema de Valor Inicial (PVI)

$$y' = 6t^5 e^{-y}, \qquad y(1) = \ln 2$$

- Escrevemos na forma separável e resolvemos

$$e^y y' = 6t^5$$
$$\int e^y \, dy = \int 6t^5 \, dt$$
$$e^y = t^6 + C \quad \leftarrow \text{ solução implícita}$$

- Usando a condição inicial: $t = 1 \implies y = \ln 2$

$$e^{\ln 2} = 1^6 + C \implies 2 = 1 + C \implies C = 1.$$

- Solução: $e^y = t^6 + 1$
- Opcional: $y = ln(t^6 + 1)$

Exemplo 1 – com integral definida

- Vamos resolver o Problema de Valor Inicial (PVI)

$$y' = 6t^5 e^{-y}, \qquad y(1) = \ln 2$$

- Escrevemos na forma separável e resolvemos

$$e^y y' = 6t^5$$

$$\int e^y \, dy = \int 6t^5 \, dt$$

$$\int_{\ln 2}^{y} e^s \, ds = \int_1^t 6s^5 \, ds$$

$$e^y - e^{\ln 2} = t^6 - 1^6 \quad \leftarrow \text{ solução implícita}$$

- Solução: $e^y = t^6 + 1$
- Opcional: $y = ln(t^6 + 1)$

Exemplo 2

- Vamos resolver o modelo de Verhulst

$$y' = y - ay^2$$

- Escrevemos na forma separável e resolvemos

$$\frac{y'}{y(1-ay)} = 1$$

$$\int \frac{1}{y(i-ay)} dy = \int 1 dt = t + C$$

Exemplo 2

$$\int \frac{1}{y(1-ay)}dy = t + C$$

- A integral é por frações parciais

$$\frac{1}{y(1-ay)} = \frac{1}{y} + \frac{-a}{ay-1}$$
$$\int \frac{1}{y(1-ay)}dy = \ln y - \ln(ay-1) + C_1$$

- Solução:

$$\ln y - \ln(ay-1) = t + C$$

Exemplo 2

- Solução:

$$\ln y - \ln(ay-1) = t + C$$

- Opcional: isolar y

$$\begin{aligned}
t + C = \ln \frac{y}{ay-1} &= \ln \frac{(y-\frac{1}{a})+\frac{1}{a}}{ay-1} = \ln \frac{1}{a}\Big(1 + \frac{1}{ay-1}\Big) \\
e^{t+C} &= \frac{1}{a}\Big(1+\frac{1}{ay-1}\Big) \\
ae^{t+C} &= 1 + \frac{1}{ay-1} \\
\frac{1}{ay-1} &= ae^{t+C} - 1 \\
ay - 1 &= (ae^{t+C}-1)^{-1} \\
y &= \frac{1+(ae^{t+C}-1)^{-}1}{a}
\end{aligned}$$