Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo

SME0620 - Estatística I
Professor: Francisco A. Rodrigues

Oitava Lista de exercícios: Simulação Estocástica

1 - Implemente o gerador linear de número pseudo-aleatórios: $X_{i+1} = (aX_i + c)\text{mod}m$. Gere uma sequência de 1.000 números considerando:
a) $X_0 = 1$, $a = 11$, $c = 0$, $m = 16$
b) $X_0 = 1$, $a = 13$, $c = 13$, $m = 16$
Verifique em quais casos a sequência é periódica. Obtenha a distribuição de frequência dos números gerados e grafique a sequência de números em função do tempo.

2 - Usando o método de Monte Carlo, obtenha os valores aproximados da seguinte integrais considerando 100, 1000 e 2000 interações:
a) $\theta = \int_0^1 (x+1)dx = 1,5$
b) $\theta = \int_2^4 (x+1)dx = 8$
c) $\theta = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$
d) $\theta = \int_0^1 \int_0^1 (4x^2y + y^2)dxdy = 1$
e) $\theta = \int_0^1 e^{e^x}dx$
f) $\theta = \int_0^1 (1-x^2)^{3/2}dx$
g) $\theta = \int_{-2}^2 e^{x+x^2}dx$
h) $\theta = \int_0^\infty x(1-x^2)^{-2}dx$
i) $\theta = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$
j) $\theta = \int_0^1 \int_0^1 e^{(x+y)^2}dydx$

3 - Implemente um programa para calcular o valor de π usando simulação de Monte Carlo. Varie o número de interações de 500 até 5000, em passos de 500. Para cada interação, realize 10 simulações e obtenha o valor médio calculado de π. Grafique o valor obtido em função do número de interações e verifique a convergência.

4 - Construa funções para gerar amostras das seguintes distribuições de variáveis aleatórias:
a) $P(X = 1) = 0.3$; $P(X = 2) = 0.1$ $P(X = 3) = 0.4$; $P(X = 5) = 0.2$
b) Distribuição binomial,
c) Distribuição geométrica,
d) Distribuição de Poisson,
d) Modelo exponencial,
d) Molelo normal,

5 - Teorema do limite central: Seja X_1, X_2, ..., X_n uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com valor médio μ e variância σ^2. Então $Z_n = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{(n)}}$ tem uma distribuição normal reduzida, isto é, Z_n segue uma normal com média igual a zero e variância igual a um, onde $\overline{X} = \frac{X_1+X_2+...X_n}{n}$.
Verifique o teorema do limite central através de simulação pelo método de Monte-Carlo. Considere amostras das seguintes distribuições de probabilidade:
a) Normal
b) Uniforme
c) Exponencial
d) Poisson
Considere amostras de tamanhos 10, 100, 1000 e 2000. Verifique que quando o tamanho da amostra aumenta a distribuição da média amostral mais se aproxima de uma normal.

6 - Um par de dados é lançado até que todas as possíveis saídas, isto é, 2, 3, ..., 12, tenham saído ao menos uma vez. Faça um estudo de simulação para estimar o número esperado de lançamentos necessários.

7 - Simule o problema de Monty Hall.