

**SME0123 - Estatística**

Professor: Francisco A. Rodrigues

**Sexta Lista de exercícios: Inferência Estatística: Teorema do Limite Central, Estimação, Intervalos de Confiança**

- 1 - a) Mostre que o estimador da média  $\bar{X}$  é não-viesado e consistente.  
b) Verifique se o estimador para a variância a seguir é não-viesado e consistente.

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Caso não seja consistente, faça uma transformação nesse estimador e obtenha um estimador consistente.

- 2 - Determine o estimador de máxima verossimilhança para as seguintes distribuições:  
a) exponencial      b) Bernoulli      c) Poisson
- 3 - Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição Normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Tomemos uma amostra aleatória independente e igualmente distribuída  $X_1, \dots, X_n$  de  $X$ . Qual o estimador de máxima verossimilhança para  $\theta = (\mu, \sigma^2)$ ?
- 4 - a) Mostre que se  $X$  é uma variável aleatória com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  e  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  é uma amostra aleatória simples de  $X$ , então  $E(\bar{X}) = \mu$  e  $V(\bar{X}) = \sigma^2/n$ .  
b) Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra aleatória simples de uma população com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Mostre que para a variável aleatória  $Z = (\bar{X} - \mu)\sqrt{n}/\sigma$ ,  $E[Z] = 0$  e  $V(Z) = 1$ .
- 5 - Simule o teorema do limite central. Gere amostras aleatórias de tamanho  $n$  a partir das distribuições: (a) normal, (b) uniforme, (c) exponencial. Verifique que quando aumenta-se o número de amostras, a distribuição da média amostral tende a uma distribuição normal.
- 6 - Uma amostra das alturas de 169 alunos do sexo masculino de uma universidade apresentou média 170 cm e desvio padrão de 7 cm.  
a) Encontre uma estimativa intervalar de 92% para a altura média dos alunos do sexo masculino dessa universidade. (R: (169,06; 170,9)).  
b) Que tamanho de amostra desses alunos é necessário para que 90% das médias de amostras desse tamanho estejam num intervalo de  $\pm 10$  cm da verdadeira média.
- 7 - Uma amostra aleatória assume os valores 3, 6 e 8 com probabilidade 0,4, 0,3 e 0,3, respectivamente. Uma amostra com 40 observações é sorteada. Calcule a probabilidade de que a média da amostra seja maior do que 5.
- 8 - Em uma certa cidade, a duração de conversas telefônicas (em minutos) segue o modelo exponencial com parâmetro igual a  $1/3$ . Observando-se uma amostra aleatória de 50 dessas chamadas, qual será a probabilidade de que tais amostras em média não ultrapassem 4 minutos?
- 9 - Quando um lote de certo produto químico é preparado, a quantidade de uma impureza específica no lote é uma variável aleatória com valor médio igual a quatro gramas e desvio padrão de 1,5 gramas. Se 50 lotes forem preparados independentemente, qual será a probabilidade (aproximada) de que a quantidade média de impureza na amostra esteja entre 3,5 gramas e 3,8 gramas?
- 10 - Mostre que o estimador da proporção populacional ( $\hat{p}$ ) é normalmente distribuído com média  $E[\hat{p}] = p$  e variância  $V(\hat{p}) = p(1-p)/n$ , onde  $p$  é a proporção populacional. Mostre também que esse estimador é não-viesado e consistente.
- 11 - A proporção de eleitores de um candidato A numa região é igual a 20%. Extraída uma amostra de 100 eleitores, qual é a probabilidade de que tal amostra apresente:  
a) 15% ou menos eleitores de A?      b) mais de 30% de eleitores de A?
- 12 - Suponha que  $p=30\%$  dos alunos de uma escola são mulheres. Colhemos uma amostra de 10 pessoas e calculamos a proporção de mulheres na amostra. Qual é a probabilidade de que tal proporção difira de  $p$  em menos de 0,01?
- 13 - A experiência com trabalhadores de certa indústria indica que o tempo necessário para que um trabalhador, aleatoriamente escolhido, realize uma tarefa é distribuído de maneira aproximadamente normal, com desvio padrão de 12 minutos. Uma amostra de 25 trabalhadores forneceu média igual a 140 minutos. Determinar um intervalo de confiança ao nível de 95% para a média da população de trabalhadores que fazem aquele determinado serviço. (R: (136,05; 143,9))

14 - Suponha que os comprimentos de jacarés adultos de certa raça siga o modelo Normal com média  $\mu$  desconhecida e variância igual a  $0,01 \text{ m}^2$ . Uma amostra de 10 animais foi sorteada e forneceu média 1,69 m. Encontre uma estimativa intervalar de 95% para o parâmetro desconhecido  $\mu$ . (R: (1,63;1,75))

15 - Uma nova ligação metálica é planejada para ser usada em aviões. As medidas de durabilidade num laboratório experimental são feitas com 15 peças da liga metálica. Dessa amostra, foram obtidas a média amostral  $\bar{x} = 39$  e o desvio padrão amostral  $s = 2,6$ . Achar o intervalo de confiança 90% para a média populacional. (R: (38,12;40,48))