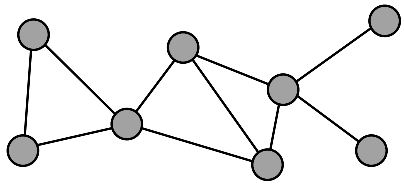
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo

SME0620 - Estatística I

Professor: Francisco A. Rodrigues

Quarta lista de exercícios: Variáveis aleatórias bidimensionais

1 - O grau k_i de um vértice i é definido como o seu número de conexões. Para o gráfico abaixo:
a) Determine a distribuição de probabilidade conjunta de (K, K'), isto é, a fração de arestas que ligam vértices com graus K (de um lado) com K' (do outra lado da aresta).
b) Determine a distribuição de $P(K = k|K' = k)$.
c) Calcule $P(K = K')$, $P(K > K')$ e $P(K + K' \leq 4)$.



2 - Suponha que três bolas são escolhidas sem reposição de uma urna com 5 bolas brancas e 8 vermelhas. Seja X_i igual a um se a i-ésima bola selecionada é branca e igual zero, caso contrário. Determine a distribuição de probabilidade de (X_1, X_2).

3 - Considere uma sequência de ensaios de Bernoulli com probabilidade de sucesso p. Seja X_1 o número de falhas antes do primeiro sucesso e seja X_2 o número de falhas entre os dois primeiros sucessos. Encontre a distribuição de probabilidade conjunta de X_1 e X_2.

4 - Quatro moedas de 5 centavos e seis moedas de 10 centavos são arremessadas e o número de caras é observado. Se $N = 4$, qual é a probabilidade condicional de que exatamente duas moedas de 5 centavos saíram cara?

5 - Para o lançamento de dois dados equilibrado, defina duas variáveis aleatórias. Seja X o número de vezes que aparece a face 2 e Y igual a zero se a soma for par e igual a 1, caso contrário.
a) Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y.
b) Calcule $E(X)$, $E(Y)$ e $E(X+Y)$.
c) Verifique se X e Y são independentes.
d) Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y.

6 - A fdp conjunta de (X, Y) é dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) \text{ se } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

a) Verifique que essa é uma função densidade de probabilidade conjunta.
b) Determine as marginais de X e Y.
c) Encontre $P(Y > 1/2|X = x)$.
d) X e Y são independentes?

7 - A fdp conjunta da variável aleatória (X, Y) é dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} \quad \text{para } 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0, \text{ para quaisquer outros valores.} \end{cases}$$

Calcule:
a) $P(X > 1|Y = 1)$, b) $P(X < a)$, c) $P(X < 2|Y = y)$, d) $P(Y > 1|X = x)$,
e) $P(X < 2|0 < Y < 3)$, f) $E(X)$ e $E(Y)$ g) X e Y são independentes?

8 - Suponha que a fdp conjunta da variável aleatória bidimensional (X, Y) seja dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \\ 0, \text{ para quaisquer outros valores.} \end{cases}$$

Calcule: a) $P(X > 1/2)$ b) $P(Y < 1/2|X = 1/2)$.

9 - a) Mostre que para duas variáveis aleatórias independentes, o coeficiente de correlação de Pearson $\rho = 0$.

b) No entanto, $\rho = 0$ não implica em independência. Suponha que (X,Y) tenha distribuição de probabilidade conjunta dada pela tabela a seguir.

Y/X	-1	0	1
-1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

a) Mostre que $E(XY) = E(X)E(Y)$ e consequentemente $\rho = 0$.

b) Explique por que X e Y não são independentes.

10 - Um dado é lançado duas vezes. Seja X igual à soma dos dados e Y igual ao valor do primeiro dado menos o segundo. Calcule $cov(X,Y)$.