Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo

SME0620 - Estatística I

Professor: Francisco A. Rodrigues

Terceira Lista de exercícios: Variáveis aleatórias contínuas

1 - A variável aleatória contínua X tem fdp $f(x) = x/2$, $0 \leq x \leq 2$. São feitas duas determinações independentes de X. Qual será a probabilidade de que ambas essas determinações sejam maiores do que 1? Se três determinações independentes forem feitas, qual a probabilidade de que exatamente duas delas sejam maiores do que 1? (Resp: 27/64)

2 - Seja X a variável aleatória contínua com fdp $f(x) = be^{-bx}$, $x \geq 0$. Seja $p_j = P(j \leq X \leq j+1)$. Verifique que p_j é da forma $(1-a)a^j$ e determine a.

3 - Seja X uma variável aleatória contínua com fdp dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ -ax+3a, & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Determine a constante a. (Resp: $a = 1/2$)
b) Determine a função de distribuição acumulada $F(x)$ e esboce seu gráfico.
c) Se X_1, X_2, X_3 forem três observações independentes de X, qual será a probabilidade de, exatamente, um desses números ser maior do que 1,5? (Resp: 3/8)

4 - O diâmetro X de um cabo elétrico é uma variável aleatória contínua X com fdp $f(x) = 6x(1-x)$ se $0 \leq x \leq 1$. $f(x) = 0$, caso contrário.
a) Verifique que essa expressão é uma fdp e esboce seu gráfico.
b) Obtenha a expressão para a função de distribuição acumulada e esboce seu gráfico.
c) Determine o número b tal que $P(X < b) = 2P(X > b)$.
d) Calcule $P(X \leq 1/2 | 1/3 < X < 2/3)$.

5 - Suponha que o erro na temperatura de reação (em ^{o}C) para um experimento de laboratório controlado seja uma variável aleatória contínua X com função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} x^2/3, & \text{se } -1 < x < 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Determine $F(x)$. (Resp: 0, $x < -1$, $\frac{x^3+1}{9}$ $-1 \leq x \leq 2$, 1 se $x > 2$)
b) Calcule $P(0 \leq X \leq 1)$. (Resp: 1/9)

6 - Como é mais econômico limitar chamadas de longa distância a três minutos ou menos, a fdp de X, isto é, a duração em minutos de chamadas de longa distância, pode ser da forma:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-x/3}, & \text{se } 0 \leq x < 3 \\ 1 - \frac{e^{-x/3}}{2}, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Determine a probabilidade de que uma chamada de longa distância
a) dure não mais do que dois minutos,
b) dure entre dois e seis minutos.

7 - Suponha que X seja uniformemente distribuída sobre $[-\alpha, \alpha]$, onde $\alpha > 0$. Quando possível, determine α de modo que as seguintes relações sejam satisfeitas:
a) $P(X > 1) = 1/3$, (Resp: $\alpha = 3$) b) $P(X > 1,5) = 1/2$, c) $P(X < 1/2) = 0,7$,
d) $P(X < 1/2) = 0,3$, e) $P(|X| < 1) = P(|X| > 1)$.

8 - Se a variável aleatória K for uniformemente distribuída sobre $[0,5]$, qual será a probabilidade de que as raízes da equação $4x^2 + 4xK + K + 2 = 0$ sejam reais? (Resp: 3/5)

9 - Suponha que a carga de ruptura de um tecido de algodão (em libras), representada pela variável aleatória X, seja normalmente distribuída com $E(X) = 165$ e $V(X) = 9$. Além disso, admita que uma amostra desse tecido seja considerada defeituosa se $X < 162$. Qual é a probabilidade de que um tecido escolhido ao acaso seja defeituoso? (R: 0,159)

10 - O peso médio de 500 estudantes do sexo masculino de uma determinada universidade é 75,5 Kg e o desvio padrão é 7,5 Kg. Admitindo que os pesos são normalmente distribuídos, determine a percentagem de estudantes que pesam:

a) entre 60 e 77,5 Kg. (R: 0,579) b) mais do que 92,5 Kg. (R: 0,011)

11 - Uma máquina de bebidas está regulada de modo a servir uma média de 150ml por copo. Se a quantidade servida por copo seguir uma distribuição normal com desvio padrão de 20 ml, determine:

a) a percentagem de copos que conterão mais de 175ml de bebida? (R: 0,10)

b) se forem usados copos de 170ml cada, quantos transbordarão em média nas próximas 100 bebidas? (R: 16)

c) As 25% bebidas com menor conteúdo estão abaixo de quantos ml? (R: 136,6)

12 - Doentes sofrendo de certa moléstia são submetidos a um tratamento intensivo cujo tempo de cura foi modelado por uma função densidade de probabilidade normal, $X \sim N(15,4)$.

a) Determine a fração de pacientes que demoram mais de 17 dias para se recuperar.

b) Determine a probabilidade de um doente, escolhido ao acaso, apresentar tempo de cura inferior a 20 dias.

c) Antes de quanto tempo 25% dos pacientes serão curados?

d) Para 100 pacientes escolhidos ao acaso, qual é o número esperado de pacientes que serão curados em menos de 11 dias?

13 - Um empregado viaja diariamente de sua casa nos subúrbios até o escritório, no centro da cidade. O tempo médio de viagem de ida é de 24 minutos, com desvio padrão 3,8 minutos. Assuma que seus tempos de viagem sejam distribuídos normalmente.

a) Qual é a probabilidade de que a viagem dure menos de meia hora?

b) Se o escritório abre às 9h e ele sai de sua casa diariamente às 8h45min, qual é a porcentagem de vezes que ele estará atrasado para o trabalho?

c) Se ele sai de casa às 8h35min e o café é servido no escritório entre 8h50min e 9h, qual é a probabilidade de que ele chegue antes ou depois do café?

d) Determine o tempo acima do qual encontramos os 15% menores tempos de viagem.

14 - Um médico especializado em gestação afirma que a duração do tempo gestacional humano (em dias) é normalmente distribuído com média 270 e variância 100. Em uma audiência em um tribunal, o acusado de ser o pai de uma criança afirma que ele estava fora do país por um período que começou 290 dias antes do nascimento e terminou 240 dias antes do nascimento. Qual é a probabilidade de que o acusado seja o pai? (R: 0.0241)

15 - Uma indústria fabrica lâmpadas especiais que ficam em operação continuamente. A empresa oferece aos seus clientes a garantia de reposição caso uma lâmpada dure menos de 50 horas. A vida útil dessas lâmpadas é modelada através de uma distribuição exponencial com parâmetro 1/8000.

a) Determine a percentagem de trocas por defeito de fabricação. (R:0,006)

b) Determine a duração média das lâmpadas e a sua variância.

16 - Suponha que um fusível tenha duração de vida X, a qual pode ser considerada uma variável aleatória contínua com distribuição exponencial. Existem dois processos para fabricar um fusível. O processo I apresenta uma duração esperada de 100 horas (ou seja, $\alpha_I = 1/100$), enquanto que o processo II apresenta duração de vida esperada de 150 horas ($\alpha_{II} = 1/150$). Suponha que o processo II seja duas vezes mais custoso (por fusível) que o processo I, que custa C reais por fusível. Admita, além disso, que se um fusível durar menos do que 200 horas, uma multa de k reais seja lançada sobre o fabricante. Qual o processo deve ser empregado?

17 - O intervalo de tempo, em minutos, entre emissões consecutivas de uma fonte radioativa é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\alpha = 2$.

a) Determine a probabilidade de que ocorra uma emissão em um intervalo inferior a 2 minutos.

b) Qual a probabilidade do intervalo entre emissões ser superior ou igual a 7 minutos, sabendo-se que tal intervalo é superior ou igual a 5 minutos?

18 - Certo tipo de fusível tem duração de vida que segue uma distribuição exponencial com vida média de 100 horas. Cada fusível tem um custo de R\$10,00 e, se durar menos de 200 horas, existe um custo adicional de R\$8,00. Pergunta-se:

a) Qual a probabilidade de um fusível durar mais de 150 horas?

b) Foi proposta a compra de uma outra marca que tem uma vida média de 200 horas e um custo de R\$15,00. Considerando também a incidência do custo adicional, deve ser feita a troca de marca?

19 - Suponha que a variável aleatória X tem uma distribuição exponencial com parâmetro α. Calcule a probabilidade de que X ultrapasse seu valor esperado.

20 - a) Calcule a função de distribuição acumulada para uma variável aleatória X que segue uma distribuição exponencial.

b) Demonstre a propriedades de "falta de memória" da distribuição exponencial, isto é, se a variável aleatória X segue uma distribuição exponencial, então $P(X > s+t)|X > t) = P(X > s)$ para $s,t \geq 0$.

21 - Seja X uma variável aleatória contínua com fdp:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x/2}, & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-x/2}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Calcule: a) $E[X]$, b) $V(X)$.

22 - Seja X a variável aleatória com fdp:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine o valor esperado de $g(X) = 4X + 3$.

23 - Suponha que X seja uma variável aleatória com fdp:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule: a) $E[X]$, b) $V(X)$.

24 - Suponha que um dispositivo eletrônico tenha uma duração de vida X (em unidades de 1000 horas) com seguinte fdp:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Suponha que o custo de fabricação de um desses dispositivos seja R\$ 2,00. O fabricante vende a peça por R\$ 5,00, mas garante um reembolso total se $X \leq 0,9$. Qual será o lucro esperado pelo fabricante? (Resp: R\$ 0,03)

25 - Seja X a variável aleatória com fdp:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x}/2, & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-x}/2, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Seja $y = |X|$. Determine $E[Y]$.