Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo

SME0620 - Estatística I

Professor: Francisco A. Rodrigues

Segunda Lista de exercícios: Variáveis aleatórias, medidas resumo e principais modelos discretos

1 - Duas bolas são retiradas sucessivamente, sem reposição, de uma caixa que contém 5 bolas vermelhas e 4 pretas. Seja X a variável aleatória “número de bolas vermelhas retiradas no experimento”. Determine a distribuição de probabilidade da variável aleatória X.

2 - Duas bolas são escolhidas aleatoriamente e sem reposição de uma urna contendo 8 bolas brancas, 4 bolas pretas e 2 bolas laranja. Suponha que nós ganhamos R$ 2,00 para cada bola preta selecionada e perdemos R$ 1,00 para cada bola branca selecionada. Seja X a variável aleatória que denota nossos ganhos. Quais são os possíveis valores de X e as probabilidades associadas a cada valor?

3 - Dois dados são lançados. Seja X o produto dos dois dados. Determine $P(X = i)$, onde $i = 1, 2, \ldots, 36$.

4 - Seja X a variável aleatória que representa a diferença entre o número de caras e o número de coroas obtido em n lançamentos. Quais os possíveis valores de X?

5 - Sabe-se que determinada moeda apresenta cara três vezes mais frequentemente do que coroa. Essa moeda é jogada três vezes. Seja X o número de caras que aparece. Estabeleça a distribuição de probabilidade de X e também a função de distribuição acumulada. Faça um esboço do gráfico de ambas.

6 - Suponha que a variável aleatória X tenha os valores possíveis $1, 2, 3, \ldots$, e $P(X = j) = 1/2^j$, $j = 1, 2, \ldots$

a) Calcule $P(X \text{ ser par })$. (Resp: 1/3)

b) Calcule $P(X \geq 5)$. (Resp: 1/16)

c) Calcule $P(X \text{ ser divisível por } 3)$. (Resp: 1/7)

7 - Considere uma variável aleatória X com resultados possíveis $0, 1, 2, \ldots$, e $P(X = j) = (1-a)a^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

a) Para que valores de a o modelo acima tem sentido?

b) Verifique que essa expressão representa uma legítima distribuição de probabilidade.

8 - Um fabricante produz peças tais que 10 por cento delas são defeituosas e 90 por cento são não-defeituosas. Se uma peça defeituosa for produzida, o fabricante perde R$ 1,00, enquanto que uma peça não-defeituosa lhe dá um lucro de R$10,00. Se X for o lucro líquido por peça, calcule $E(X)$.

9 - Um vendedor de cachorro quente trabalha na porta do estádio do Morumbi em dias de jogo. Ele pode deixar preparado 5, 6 ou 7 dúzias de sanduíches, que custam a ele R$ 5 a dúzia. Sabe-se que a procura por cachorro quente (X), no seu ponto, é uma variável aleatória com a seguinte função de probabilidade:

X	4	5	6	7
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Sabe-se que cada dúzia de sanduíche é vendida a R$ 12 e os sanduíches não vendidos vão para um canil que paga R$ 2 pela dúzia. Qual é o número de dúzias de sanduíches que devem ser preparados de modo a maximizar o lucro médio do vendedor? (R: 6 dúzias com lucro de R$ 35)

10 - Demonstre as seguintes propriedades do valor esperado de uma variável aleatória X:

a) Se $X = C$, onde C é uma constante, então $E(X) = C$.

b) Se C é uma constante, então $E(CX) = CE(X)$.

c) Se X e Y forem duas variáveis quaisquer, então $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

d) Se X e Y forem duas variáveis aleatórias independentes, então $E(XY) = E(X)E(Y)$.

11 - Seja X uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli. Calcule $E[2^X]$.

12 - Mostre que: $V(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = E[X^2] - [E(X)]^2$.

13 - Demonstre as seguintes propriedades da variância de uma variável aleatória X:

a) Se C for uma constante, então $V(X+C) = V(X)$.

b) Se C for uma constante, então $V(CX) = C^2V(X)$

c) Se X e Y forem independentes, então $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

14 - Um participante de um programa de auditório deve responder a duas questões, 1 e 2, as quais deve ser escolhidas na ordem que ele preferir. Se ele decidir tentar a questão i, então ele só pode responder à questão $j \neq i$, $i = j = 1,2$, se ele acertar a questão i. Se ele erra a primeira questão, ele perde a chance de responder à segunda questão. O participante recebe V_i reais se ele responder à questão $i = 1,2$ corretamente. Se ele responder ambas as questões de forma correta, ele recebe $V_1 + V_2$ reais. Se a probabilidade de que ele saiba a resposta da questão i é P_i, qual questão ele deve responder primeiro para maximizar seu ganho? Assuma que os eventos: E_i : "ele sabe a resposta da questão i", $i = 1,2$, são independentes.

15 - Suponha que X pode ter valores 0, 1 e 2. Se para alguma constante c, $P(X = i) = cP(X = i-1)$, $i = 1,2$, encontre $E(X)$.

16 - Suponha que $P(X = 0) = 1 - P(X = 1)$. Se $E(X) = 3V(X)$, encontre $P(X = 0)$.

17 - Calcule a esperança e variância para uma variável aleatória X que tem
a) distribuição binomial. b) distribuição de Poisson. c) distribuição geométrica.

18 - Suponha que o número de erros tipográficos em uma página de um livro tenha uma distribuição de Poisson com parâmetro $\alpha = 0,5$. Calcule a probabilidade de que há ao menos um erro em uma dada página desse livro. (R: 0,39)

19 - O número de pedidos de reparo que uma construtora recebe por mês é uma variável aleatória. Em média, são recebidos 7,5 pedidos por mês. Determine a probabilidade de que em um mês qualquer, a construtora receba:
a) exatamente dois pedidos de reparo. (R: 1,5%)
b) no máximo 2 pedidos de reparo. (R: 2%)
c) no mínimo 8 pedidos de reparo. (R: 47,5%)

20 - O número de ovos colocados na folha de uma árvore por um inseto é uma variável aleatória com distribuição de Poisson com parâmetro λ. Entretanto, tal variável aleatória pode ser observada apenas se for positiva, já que se ela é igual a zero, o inseto pode não ter passado por tal folha. Se Y denota o número de ovos, então $P(Y = i) = P(X = i|X > 0)$, onde X tem distribuição de Poisson com parâmetro λ. Encontre $E[Y]$.

21 - O número de bactérias em uma lâmina contendo água contaminada tem uma distribuição de Poisson com parâmetro 5. Qual é a probabilidade de que a lâmina apresenta 8 ou mais bactérias?

22 - Uma fração $p = 0,05$ de produtos em uma linha de produção é defeituosa. A saída da linha é amostrada, uma a uma, de uma maneira aleatória. Qual é a probabilidade de que o primeiro item defeituoso seja o décimo item amostrado?

23 - Se a probabilidade de que certo ensaio dê reação "positiva" for igual a 0,4, qual será a probabilidade de que ao menos 5 reações "negativas" ocorram antes da primeira positiva?

24 - Em uma séria do campeonato de basquete da NBA, o time que ganhar quatro jogos em 7 (melhor de 4) será o vencedor. Suponha que o time A tenha probabilidade 0,55 de ganhar do time B durante o campeonato.
a) Qual é a probabilidade de que A vença a série em seis jogos? (R: 0,18)
b) Qual é a probabilidade de que A vença a série? (R: 0,61)

25 - Pequenos motores elétricos são expedidos em lotes de 50 unidades. Antes que uma remessa seja aprovada, um inspetor escolhe 5 desses motores e inspeciona-os. Se todos os motores inspecionados são perfeitos, o lote é aprovado. No entanto, se um ou mais motores inspecionados forem defeituosos, o lote todo é inspecionado. Suponha que exista três motores defeituosos no lote. Qual é a probabilidade de que o inspetor faça a inspeção no lote todo? (R: 0,28)

26 - Um conjunto de peças é formado por 20 peças defeituosas e 80 perfeitas. Dez peças são escolhidas ao acaso, sem reposição.
a) Qual é a probabilidade de que cinco peças sejam defeituosas? (R:0,021)
b) Seja a variável aleatória X : "número de peças defeituosas". Calcule $E(X)$ e $V(X)$.

27 - Cada jogo que você joga, você ganha com probabilidade p. Você planeja jogar 5 jogos, mas se você ganhar o quinto jogo, você continuar jogando até perder.
a) Encontre o número esperado de jogos que você deve jogar.
b) Encontre o número esperado de jogos que você perde.

28 - Uma moeda equilibrada é lançada sucessivamente, de modo independente, até que ocorra a primeira cara. Seja X a variável aleatória que conta o número de lançamentos anteriores à ocorrência de cara. Determine:
a) $P(X < 2)$ (R:0,75) b) $P(X > 1)$ (R:0,250) c) $P(3 < X \leq 5)$ (R:0,047)
d) Quantas vezes deve, no mínimo, ser lançada a moeda para garantir a ocorrência de cara com pelo menos 0,8 de probabilidade? Dica: calcule $P(X \geq x) \geq 0,8$, (R: $x = 2$).
e) $E(X)$ e $V(X)$.