Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo

SME0620 - Estatística I
Professor: Francisco A. Rodrigues

Primeira lista de exercícios: Probabilidades

1 - Usando o diagrama de Venn, mostre as seguintes relações:
a) $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$
b) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$
c) $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$
d) $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$

2 - Sejam A, B e C pertencente a um mesmo espaço amostral. Mostre que:
a) $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$
b) $P(A \bigcup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \bigcap B|C)$

3 - Sejam A, B e C três eventos associados a um experimento. Expresse em notação de conjuntos as seguintes afirmações verbais:
a) Ao menos um dos eventos ocorrem.
b) Exatamente um dos eventos ocorrem.
c) Não mais de dois eventos ocorrem simultaneamente.

4 - Suponha que uma urna contenha sete bolas pretas e cinco bolas brancas. Nós selecionamos duas bolas da urna sem reposição. Qual a probabilidade de que ambas sejam pretas? (Resp: 42/132)

5 - Uma caixa contém 7 bolas pretas numeradas de 1 a 7, sete bolas brancas numeradas de 1 a 7 e seis bolas vermelhas numeradas de 1 a 6.
a) Sorteando-se uma bola dessa caixa, qual é a probabilidade de encontrarmos uma bola preta? (Resp: 0,35)
b) Sorteando-se uma bola dessa caixa, qual é a probabilidade de encontrarmos uma bola par? (Resp: 0,45)
c) Sorteando-se uma bola preta, qual é a probabilidade de tal bola ser par? (Resp: 3/7)
d) Sorteando-se uma bola dessa caixa, qual é a probabilidade de encontrarmos uma bola preta ou par? (Resp: 13/20)

6 - Suponha que um fabricante de sorvetes receba 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda F_1, 30% de outra fazenda F_2 e 50% de F_3. Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por F_1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para F_2 e F_3, essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente. Em uma indústria de sorvetes, os galões são armazenados em um refrigerador sem qualquer identificação das fazendas. Um galão de leite foi escolhido aleatoriamente e verificou-se que estava adulterado. Qual a probabilidade de que o leite tenha sido fornecido pela fazenda:
a) F_1? (R: 0,615) b) F_2? (R: 0,231) c) F_3? (R: 0,154).

7 - Considere duas urnas. A primeira contém duas bolas brancas e sete bolas pretas e a segunda contém cinco bolas brancas e seis pretas. Nós lançamos uma moeda e retiramos uma bola da primeira ou da segunda urna, dependendo do resultado do lançamento, isto é, cara (urna 1) ou coroa (urna 2). Qual é a probabilidade condicional de que o resultado do lançamento da moeda foi cara, dado que uma bola branca foi retirada? (R: 22/67)

8 - Ao responder uma questão de um teste de múltipla escolha, um estudante sabe a resposta ou ele "chuta". Seja p a probabilidade de que ele saiba a resposta e $1-p$, a probabilidade de que ele não saiba. Assuma que o estudante acerta no "chute" com probabilidade $1/m$, onde m é o número de alternativas da questão. Qual é a probabilidade condicional de que o estudante saiba a questão, dado quele acertou a resposta correta? Obtenha uma expressão geral para esse problema e depois verifique sua resposta para $m = 5$ e $p = 1/2$. (Resp: 5/6)

9 - Um laboratório que faz testes sanguíneos apresenta eficácia de 95% na detecção de uma certa doença quando, de fato, a pessoa está doente. Entretanto, o teste também leva a um "falso positivo" em 1% das pessoas saudáveis testadas. Isto é, se uma pessoa saudável é testada, o teste acusa que ela tem a doença com probabilidade 0,01. Se 0,5% da população realmente tem a doença, qual é a probabilidade de que uma pessoa tenha a doença dado que o teste foi positivo? (Resp: 0,323)

10 - Uma urna contém três moedas, uma das quais foi cunhada com duas caras, enquanto que as outras duas são normais e não viciadas. Uma moeda é retirada da urna ao acaso e jogada quatro vezes em sequência. Se sair cara toda vez, qual será a probabilidade de essa moeda seja de duas caras? (Resp: 24/27)

11 - Um número binário é constituído dos dígitos zero e um. Suponha que um número binário seja formado de n dígitos e que a probabilidade de um dígito incorreto aparecer seja p e que os erros em dígitos diferentes sejam independentes um do outro. Qual é a probabilidade de formar-se um número incorreto?
(Resp: $1-(1-p)^n$)

12 - Uma moeda é modificada de modo que a probabilidade de sair cara é 4 vezes maior do que a probabilidade de sair coroa. Para dois lançamento independentes, determine:
a) o espaço amostral.
b) a probabilidade de sair somente uma cara.
c) a probabilidade de sair pelo menos uma cara.
d) a probabilidade de sair dois resultados iguais.

13 - Uma urna contém três bolas brancas e quatro bolas pretas. Retira-se sucessivamente e sem reposição, duas bolas dessa urna. Calcule a probabilidade de as bolas selecionadas terem cores diferentes. (Resp: 4/7)

14 - Dois armários guardam as bolas de volei e basquete. O armário 1 tem 3 bolas de voleibol e 1 de basquete, enquanto o armário 2 tem 3 bolas de voleibol e 2 de basquete. Escolhendo-se, ao acaso, um armário e, em seguida, uma de suas bolas, calcule a probabilidade dela ser:
a) De voleibol, sabendo-se que o armário 1 foi escolhido. (Resp: 0,75)
b) De basquete, sabendo-se que o armário 2 foi escolhido. (Resp: 0,4)
c) De basquete. (Resp: 0,325)

15 - Uma urna contém quatro bolas brancas e três pretas, e uma segunda urna contém três bolas brancas e cinco pretas. Uma bola é retirada da primeira urna e colocada, sem ser vista, na segunda urna. Depois desse procedimento, qual é a probabilidade de que uma bola retirada da segunda urna seja preta? (Resp: 38/63)

16 - Um novo teste de diagnóstico para detectar o vírus HIV é apresentado tendo 95% de change de dar um resultado positivo se o paciente é portador do HIV e 98% de chance de dar um negativo se o paciente não é portador do HIV. Em uma população com prevalência de 1/1000 casos de HIV (fração de infectados), qual é a chance de que uma pessoa com teste positivo ter realmente o vírus? (Resp: 0,045)

17 - Em um certo estágio de uma investigação criminal, o inspetor está 60% convencido de que o suspeito é culpado. Suponha, entretanto, que uma nova prova mostra que o criminoso tem uma certa característica (como bigode ou cabelo castanho). Se 20% da população possui tal característica, quão certo o inspetor ficará de que o suspeito é culpado dado que o suspeito possui tal característica? (Resp: 0,882)

18 - Suponha que nós temos três cartas idênticas no formato, mas que ambos os lados da primeira carta são vermelhos, ambos os lados da segunda carta são pretos e um lado da terceira carta é vermelho e o outro preto. As três cartas são misturadas em um chapéu e uma carta é removida e colocada sobre uma mesa, de modo que apareça somente um lado. Se o lado mostrado é vermelho, qual é a probabilidade de que o outro lado seja preto?

19 - (Problema de *Monty Hall*, ver link no site) Em um programa de auditório, o convidado deve escolher uma dentre três portas. Atrás de uma das portas há um carro e atrás de cada uma das outras duas há um bode. O convidado ganhará o que estiver atrás da porta; devemos supor neste problema que o convidado prefere ganhar o carro. O procedimento para escolha da porta é o seguinte: o convidado escolhe inicialmente, em caráter provisório, uma das três portas. O apresentador do programa, que sabe o que há atrás de cada porta, abre neste momento uma das outras duas portas, sempre revelando um dos dois bodes. O convidado agora tem a opção de ficar com a primeira porta que ele escolheu ou trocar pela outra porta fechada. Que estratégia deve o convidado adotar? Com uma boa estratégia, que probabilidade tem o convidado de ganhar o carro? (Ver solução no site da disciplina)

20 - Um rapaz se sustenta com os lucros das apostas de um jogo que ele realiza: ele esconde uma bolinha embaixo de um pote (dentre três potes iguais), então troca com rapidez as posições dos potes e pergunta em qual pote está a bola. Para obter um lucro maior, ele "vende" uma informação: ele mostra o conteúdo de um dos potes em troca de o apostador dobrar a sua aposta. Ele não levanta o pote que tem a bolinha nem o pote que o apostador escolheu inicialmente. Pergunta-se: dobrando a aposta e vendo o pote que o rapaz levantou, vale a pena mudar a escolha inicial? (Dica: Solução parecida com o problema de Monty Hall)

21 - Suponha que uma urna contenha 8 bolas vermelhas e 4 bolas brancas. Nós escolhemos duas bolas sem reposição.
a) Se assumirmos que cada bola escolhida tem a mesma chance de ser escolhida, qual é a probabilidade de que ambas sejam vermelhas? (Resp: 14/33)
b) Suponha agora que cada bola tenha um peso diferente, com cada bola vermelha com peso r e cada bola branca com peso w. Suponha ainda que a probabilidade de selecionar a próxima bola seja igual ao seu peso dividido pelo peso de

todas as bolas na urna. Qual é a probabilidade de que ambas as bolas selecionadas sejam vermelhas? (Resp: $\frac{8r}{8r+4w}\frac{7r}{7r+4w}$)

22 - a) Demostre o teorema de Bayes.

b) Mostre que:

$$P(A|B,C) = \frac{P(B|A,C)P(A|C)}{P(B|C)}$$

23 - Simule o problema de *Monty Hall*.

24 - Simule o lançamento de duas moedas e calcule as freqüências relativas de cada resultado possível. Para um número grande de lançamentos, verifique se a freqüência relativa se aproxima dos valores exatos das probabilidades.

25 - Simule o lançamento de dois dados e calcule as freqüências relativas de cada resultado possível. Para um número grande de lançamentos, verifique se a freqüência relativa se aproxima dos valores exatos das probabilidades de sair cada combinação de números.