

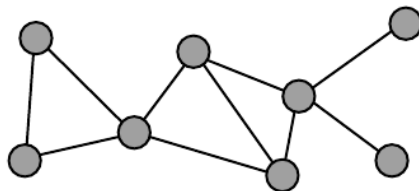
Lista 4 – Soluções

1 - O grau k_i de um vértice i é definido como o seu número de conexões. Para o gráfico abaixo:

a) Determine a distribuição de probabilidade conjunta de (K, K') , isto é, a fração de arestas que ligam vértices com graus K (de um lado) com K' (do outro lado da aresta).

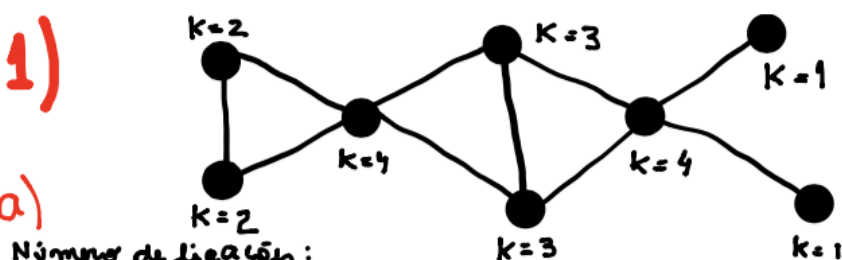
b) Determine a distribuição de $P(K|K')$.

c) Calcule $P(K = K')$, $P(K > K')$ e $P(K + K' \leq 4)$.



1)

a)



Número de ligações:

$K \backslash K'$	1	2	3	4	Total
1	0	0	0	2	2
2	0	2	0	2	4
3	0	0	2	4	6
4	2	2	4	0	8
Total	2	4	6	8	20

Assim, as marginais:

K	1	2	3	4
$P(K=k)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{8}{20}$

K'	1	2	3	4
$P(K'=k')$	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{8}{20}$

Note que $P(K=k) = P(K'=k)$.

↳ grafo sem direção.

Assim, a dist. de prob. condicional:

$$P(K=k|K'=k) = \frac{P(K=k, K'=k)}{P(K'=k)}$$

K	1	2	3	4
$P(K=k K'=1)$	0	0	0	$\frac{2}{20} : \frac{2}{20} = 1$

K	1	2	3	4
$P(K=k K'=2)$	0	$\frac{2/20}{4/20}$	0	$\frac{2/20}{4/20}$
		$\downarrow$		$\downarrow$
		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$

K	1	2	3	4
$P(K=k K'=3)$	0	0	$\frac{2/20}{6/20}$	$\frac{4/20}{6/20}$
			$\downarrow$	$\downarrow$
			$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Notem:

$$\sum_k P(K=k|K'=k') = 1$$

K	1	2	3	4
$P(K=k K' \leq 4)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	0
	$\frac{8}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{8}{20}$	
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	

$$b) P(K=K') = \sum_{a=1}^4 P(K=a, K'=a) = \frac{2}{20} + \frac{2}{20} + \frac{4}{20} = 0,2$$

$$P(K > K') = \sum_{k=1}^4 \sum_{k' > k} P(K=k, K'=k')$$

$$P(K+K' \leq 4) = \sum_{k=1}^3 \sum_{k'=1}^3 P(K=k, K'=4-k)$$

2 - Suponha que três bolas são escolhidas sem reposição de uma urna com 5 bolas brancas e 8 vermelhas. Seja X_i igual a um se a i -ésima bola selecionada é branca e igual zero, caso contrário. Determine a distribuição de probabilidade de (X_1, X_2) .

5 BRANCAS
8 VERMELHAS

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i\text{-ésima bola é branca} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

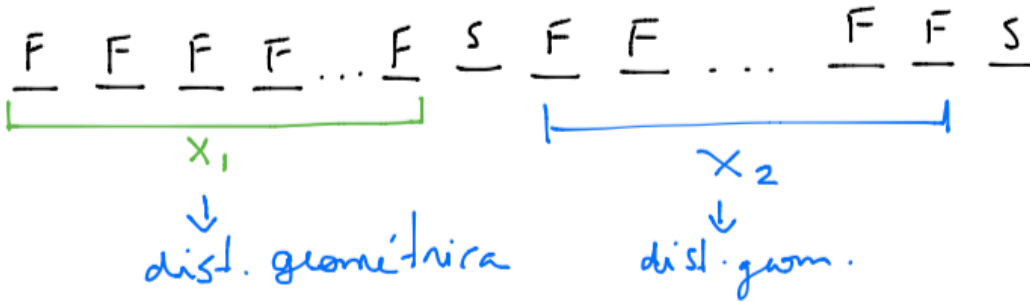
$$P(X_1 = x, X_2 = y) = ?$$

$X_1 \backslash X_2$		0	1
		0	1
0		$\frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12}$	$\frac{8}{13} \cdot \frac{5}{12}$
1		$\frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12}$	$\frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12}$

3 - Considere uma sequência de ensaios de Bernoulli com probabilidade de sucesso p . Seja X_1 o número de falhas antes do primeiro sucesso e seja X_2 o número de falhas entre os dois primeiros sucessos. Encontre a distribuição de probabilidade conjunta de X_1 e X_2 .

X_1 : nº de falhas antes do 1º sucesso

X_2 : nº de falhas entre os 2 primeiros sucessos



$$P(X_1 = k, X_2 = m) = ?$$

Notem que o valor de X_2 não depende de X_1 .

Logo, X_1 e X_2 são independentes:

$$P(X_1 = k, X_2 = m) = P(X_1 = k) \cdot P(X_2 = m) =$$

$$= (1-p)^k \cdot p \cdot (1-p)^m \cdot p = p^2 (1-p)^{k+m}.$$

4 - Quatro moedas de 5 centavos e seis moedas de 10 centavos são arremessadas e o número de caras é observado. Se $N = 4$, qual é a probabilidade condicional de que exatamente duas moedas de 5 centavos saíram cara?

Sejam as v.a.:

X : "nº de caras na moeda de 5 c."

Y : "nº de caras na moeda de 10 c."

N : "nº total de caras"

Queremos determinar:

$$P(X=2|N=4) = ?$$

$$\text{Tenho: } N = X + Y$$

Logo:

$$P(X=2|X+Y=4) = \frac{P(X=2, Y=2)}{P(N=4)} =$$

$$= \frac{P(X=2) \cdot P(Y=2)}{P(N=4)} = \frac{\binom{4}{2} p^2 (1-p)^{4-2} \cdot \binom{6}{2} p^2 (1-p)^{6-2}}{\binom{10}{4} p^4 (1-p)^{10-4}} = \frac{9}{27} = \frac{3}{7}$$

↓
Prob. de 4 caras
dentro todas as
10 moedas.

→ $p = \frac{1}{2}$

5 - Para o lançamento de dois dados equilibrado, defina duas variáveis aleatórias. Seja X o número de vezes que aparece a face 2 e Y igual a zero se a soma for par e igual a 1, caso contrário.

a) Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y .

b) Calcule $E(X)$, $E(Y)$ e $E(X+Y)$.

c) Verifique se X e Y são independentes.

d) Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y .

X : "nº de vezes que aparece a face 2"

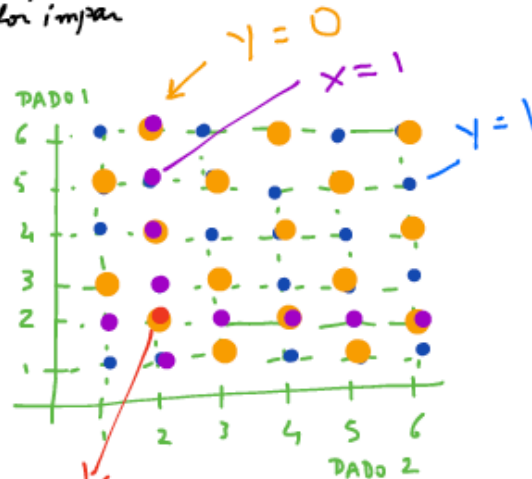
$Y = \begin{cases} 0 & \text{se a soma for par} \\ 1 & \text{se a soma for ímpar} \end{cases}$

Note-se que $X = \{0, 1, 2\}$

Assim:

a)

$X \backslash Y$	0	1	$P(X=x)$
0	$12/36$	$13/36$	$25/36$
1	$4/36$	$6/36$	$10/36$
2	$1/36$	0	$1/36$
$P(Y=y)$	$17/36$	$19/36$	1



b) as marginais:

X	0	1	2
$P(X=x)$	$25/36$	$10/36$	$1/36$

Y	0	1
$P(Y=y)$	$17/36$	$19/36$

Note-se:
 $X=2, Y=0 \Leftrightarrow \text{dado 1} = 2, \text{ dado 2} = 2$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36}$$

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{17}{36} + 1 \cdot \frac{19}{36}$$

$X+Y$	0	1	2	3
$P(X+Y=k)$	$12/36$	$17/36$	$7/36$	0

c) X e Y não são indep. pois:

$$P(X=0, Y=0) = \frac{12}{36} \neq P(X=0) \cdot P(Y=0) = \frac{25}{36} \cdot \frac{17}{36}$$

d) $\rho = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \dots$

$X \backslash Y$	0	1	2
$P(X=Y=k)$	$29/36$	$6/36$	0

$$E(XY) = 6/36$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dots$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \dots$$

7 - A fdp conjunta da variável aleatória (X, Y) é dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & \text{para } 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0, & \text{para quaisquer outros valores.} \end{cases}$$

Calcule:

- a) $P(X > 1 | Y = 1)$, b) $P(X < a)$, c) $P(X < 2 | Y = y)$, d) $P(Y > 1 | X = x)$,
 e) $P(X < 2 | 0 < Y < 3)$, f) $E(X)$ e $E(Y)$ g) X e Y são independentes?

a) $P(X > 1 | Y = 1) = ?$

Temas:

$$P(a \leq X \leq b | Y = y) = \int_a^b f(x|y) dx \Big|_{y=y}$$

onde $f(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)}$

Assim:

$$P(X > 1 | Y = y) = \int_1^{\infty} f(x|y) dx$$

mas $f(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} = \frac{2e^{-x}e^{-2y}}{\int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y} dx} = \frac{2e^{-x}e^{-2y}}{2e^{-2y} \int_0^{\infty} e^{-x} dx} = \frac{e^{-x}}{-e^{-x} \Big|_0^{\infty}} = \frac{e^{-x}}{-(0-1)} = e^{-x}$

$$\therefore P(X > 1 | Y = y) = \int_1^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^{\infty} = -(0 - e^{-1}) = e^{-1}$$

Obs: Note que $f(x, y) = g(x)h(y) \Rightarrow X$ e Y são independentes. Logo,

$P(X > 1 | Y = y)$ não deve depender de Y .

$$b) P(X < a) = \int_{-\infty}^a g(x) dx = \int_0^a e^{-x} dx = \left. \frac{e^{-x}}{(-1)} \right|_0^a = 1 - e^{-a}$$

$$\text{Mas: } g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \int_0^{\infty} 2e^{-x} e^{-2y} dy = 2e^{-x} \left. \frac{e^{-2y}}{(-2)} \right|_{y=0}^{\infty} = -e^{-x}(0-1) = e^{-x}$$

$$c) P(X < 2 | Y = y) = \int_{-\infty}^2 g(x|y) dx$$

$$\text{Mas: } h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx = \int_0^{\infty} 2e^{-x} e^{-2y} dx = 2e^{-2y} \left. \frac{e^{-x}}{(-1)} \right|_{x=0}^{\infty} = 2e^{-2y}(1-0) = 2e^{-2y}$$

$$g(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{2e^{-x} e^{-2y}}{2e^{-2y}} = e^{-x}$$

$$\text{Logo: } P(X < 2 | Y = y) = \int_0^2 e^{-x} dx = \left. \frac{e^{-x}}{(-1)} \right|_0^2 = 1 - e^{-2}$$

$$e) P(X < 2 | 0 < Y < 3) = \frac{P(X < 2, 0 < Y < 3)}{P(0 < Y < 3)} = \frac{\int_0^2 \int_0^3 f(x,y) dy dx}{\int_0^3 h(y) dy} = \dots$$

f)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x g(x) dx$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y h(y) dy$$