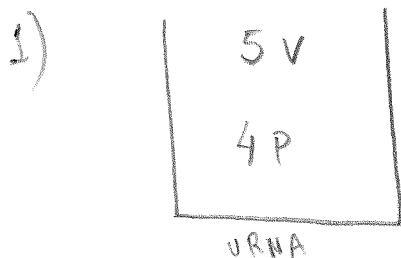


Lista 3 - Estatística



Seja a r.a. : $X = \text{"nº de bolas vermelhas retiradas"}$

$$X = \{0, 1, 2\}$$

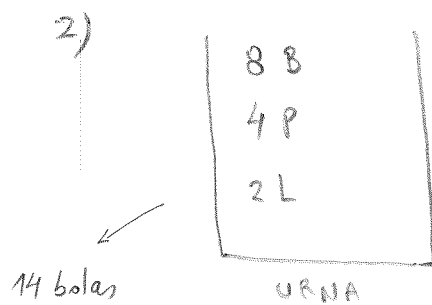
$$S = \{(V, P), (P, V), (V, V), (P, P)\}$$

As prob. associadas a cada saída possível:

saída	X	Prob.
(V, P)	1	$\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8}$
(P, V)	1	$\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8}$
(V, V)	2	$\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8}$
(P, P)	0	$\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$

Assim:

X	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{12}{72}$	$\frac{40}{72}$	$\frac{20}{72}$



bola preta retirada $\Rightarrow + R\$2$
 bola branca retirada $\Rightarrow - R\$1$
 bola lavanda retirada $\Rightarrow R\$0$.

Seja a v.a. X : "ganhos"

Seleciona-se duas bolas. Os resultados possíveis:

$$\Omega = \{ (B, P), (B, L), (P, B), (P, L), (L, B), (L, P), (B, B), (P, P), (L, L) \}$$

As saídas e os possíveis ganhos:

saída	X	Prds.
(B, B)	-2	$\frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13}$
(B, P)	1	$\frac{8}{14} \cdot \frac{4}{13}$
(B, L)	-1	$\frac{8}{14} \cdot \frac{2}{13}$
(P, B)	1	$\frac{4}{14} \cdot \frac{8}{13}$
(P, P)	4	$\frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13}$
(P, L)	2	$\frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13}$
(L, B)	-1	$\frac{2}{14} \cdot \frac{8}{13}$
(L, P)	2	$\frac{2}{14} \cdot \frac{4}{13}$
(L, L)	0	$\frac{2}{14} \cdot \frac{1}{13}$

Logo, a dist. de probs. da v.a. X :

X	-2	-1	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{56}{182}$	$\frac{32}{182}$	$\frac{2}{182}$	$\frac{64}{182}$	$\frac{8}{182}$

$$5) \quad P(\text{"cara"}) = 3 P(\text{"coroa"})$$

Mas:

$$P(\text{"cara"}) = p, \quad P(\text{"coroa"}) = 1-p$$

Então:

$$p = 3(1-p)$$

$$p = 3 - 3p \Rightarrow 4p = 3 \Rightarrow \boxed{p = \frac{3}{4}}$$

Portanto:

$$P(\text{"cara"}) = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$P(\text{"coroa"}) = \frac{1}{4} = 0,25$$

Seja a v.a.:

X : "nº de caras que aparece"

A dist. de probs. de X pode ser obtida a partir da dist. binomial:

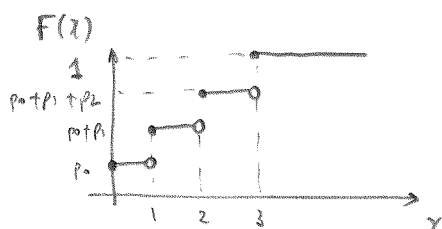
$$P(X=k) = \binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k} = \binom{3}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{3-k} \quad k=0,1,2,3$$

Assim:

X	0	1	2	3
$P(X=k)$	$0,25^3$ $\downarrow$ p_0	$3(0,25)^2 \cdot 0,75$ $\downarrow$ p_1	$3(0,25)(0,75)^2$ $\downarrow$ p_2	$(0,75)^3$ $\downarrow$ p_3

A função de dist. acumulada: $P(X \leq x) = F(x)$

X	0	1	2	3
$F(x)$	p_0	$p_0 + p_1$	$p_0 + p_1 + p_2$	1



6)

$$P(X=j) = \frac{1}{2^j} \quad j=1, 2, \dots$$

a) $P("X \text{ m par"}) = ?$

para X m par, X pode assumir valores $2, 4, 6, \dots$

ou seja: $2j$, $j=1, 2, \dots$

logo, considerando todos os valores possíveis de X .

$$P("X \text{ m par"}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4^j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^j$$

↳ mas a soma começa em $j=1$.

Sabemos: $\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x} \quad \text{se } |x| \leq 1$

Então:

$$\begin{aligned} P("X \text{ m par"}) &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^j + \underbrace{(1) - 1}_{\left(\frac{1}{4}\right)^0} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^j - 1 = \\ &= \frac{1}{1 - 1/4} - 1 = \boxed{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

7)

Temos:

$$P(X=j) = (1-a) a^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

a) Para uma função de probs. fazer sentido, $P(X=j) \geq 0$.

logo:

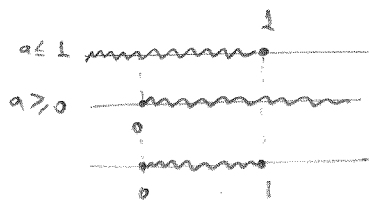
$$(1-a) a^j \geq 0$$

ou seja: $(1-a) \geq 0$ e $a^j \geq 0$

$$a^j \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$$

$$1-a \geq 0$$

$$1 \geq a \Rightarrow a \leq 1$$



logo:

$$0 \leq a \leq 1$$

b) Para $P(X=x)$ ser uma dist. de probabilidade:

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(X=j) = 1$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (1-a) a^j = \sum_{j=0}^{\infty} a^j - \sum_{j=0}^{\infty} a^{j+1} =$$

$$= \frac{1}{1-a} - a \cdot \frac{1}{1-a} = \frac{1-a}{1-a} = 1$$

$\therefore P(X=j)$ é uma dist. de probs.

g)

X	4	5	6	7
Pi	0,2	0,3	0,3	0,2

Pode deixar 5, 6 ou 7 dúzias prontas

→ cada dúzia custa R\$ 5,00

+ venda: R\$ 12,00

→ sobra: vende por R\$ 2,00

Vamos analisar cada caso.

Seja $Y = \text{"lucro"}$.

i) Prepare 5 dúzias:

X	4	5	6	7
Pi	0,2	0,3	0,3	0,2
custo	25	25	25	25
venda	50	60	60	60
lucro	25	35	35	35

A dist. de Y:

Y	25	35
Pi	0,2	0,8

então: $E(Y) = 25 \cdot 0,2 + 35 \cdot 0,8 = \text{R\$ } 33,00$

ii) prepare 6 dúzias

X	4	5	6	7
Pi	0,2	0,3	0,3	0,2
custo	30	30	30	30
venda	52	62	72	72
lucro	22	32	42	42

Y	22	32	42
Pi	0,2	0,3	0,5

$E(Y) = 22 \cdot 0,2 + 32 \cdot 0,3 + 42 \cdot 0,5 = 35 \text{ reais.}$

iii) prepare 7 dúzias

X	4	5	6	7
Pi	0,2	0,3	0,3	0,2
custo	35	35	35	35
venda	54	64	74	84
lucro	19	29	39	49

Y	19	29	39	49
Pi	0,2	0,3	0,3	0,2

$$E(Y) = 0,2 \cdot 19 + 0,3 \cdot 29 + 0,3 \cdot 39 + 0,2 \cdot 49 = R\$34,00$$

Logo, o lucro é maximizado quando são preparados 6 dúzias

14)

Se o participante escolher a questão 1, ele ganhará:

$$\begin{cases} 0 & \text{com prob. } (1 - P_1) \rightarrow \text{erra a questão 1} \\ V_1 & \text{com prob. } P_1(1 - P_2) \rightarrow \text{Acerta 1 mas erra 2.} \\ V_1 + V_2 & \text{com prob. } P_1 \cdot P_2 \rightarrow \text{Acerta 1 e 2} \end{cases}$$

O ganho esperado será:

$$E_1 = 0 \cdot (1 - P_1) + V_1 \cdot P_1(1 - P_2) + (V_1 + V_2) P_1 P_2$$

Por outro lado, se ele escolher a questão 2, ele ganhará:

$$\begin{cases} 0 & \text{com prob. } (1 - P_2) \\ V_2 & \text{com prob. } (1 - P_1) P_2 \\ V_1 + V_2 & \text{com prob. } P_1 P_2 \end{cases}$$

Logo, o ganho esperado será:

$$E_2 = 0 \cdot (1 - P_2) + V_2 (1 - P_1) P_2 + (V_1 + V_2) P_1 P_2$$

Amm, mas melhor escolher a questão 1 primeiro se:

$$E_1 \geq E_2$$

$$V_1 P_1 (1 - P_2) + (V_1 + V_2) P_1 P_2 \geq V_2 (1 - P_1) P_2 + (V_1 + V_2) P_1 P_2$$

ou seja

$$\boxed{\frac{V_1 P_1}{1 - P_1} \geq \frac{V_2 P_2}{1 - P_2}}$$

Por exemplo, se: $P_1 = 0,6$ $P_2 = 0,8$
 $V_1 = R\$ 200$ $V_2 = R\$ 100$:

Então:

$$\frac{V_1 P_1}{1 - P_1} = 300$$

$$\frac{V_2 P_2}{1 - P_2} = 400$$

$\Rightarrow \therefore$ melhor escolher a
 questão 2 primeiro $\Rightarrow \underline{E_2 > E_1}$

15) $X = \{0, 1, 2\}$

$$P(X=i) = c P(X=i-1)$$

então:

$$P(X=1) = c P(X=0)$$

$$P(X=2) = c P(X=1) = c^2 P(X=0)$$

Mas:

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1$$

$$P(X=0) + c P(X=0) + c^2 P(X=0) = 1$$

$$P(X=0) = \frac{1}{1+c+c^2}$$

$$P(X=1) = \frac{c}{1+c+c^2}, \quad P(X=2) = \frac{c^2}{1+c+c^2}$$

então:

X	0	1	2
P _i	$\frac{1}{1+c+c^2}$	$\frac{c}{1+c+c^2}$	$\frac{c^2}{1+c+c^2}$

$$E(X) = \frac{c}{1+c+c^2} + \frac{2c^2}{1+c+c^2}$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{c + 2c^2}{1+c+c^2}$$

16)

$$P(X=1) = p$$

$$P(X=0) = 1 - P(X=1) = 1 - p$$

$$E(X) = 3V(X)$$

temos:

$$E(X) = p$$

$$V(X) = p(1-p)$$

$$p = 3p(1-p)$$

$$p = 3p - 3p^2$$

$$1 = 3 - 3p \Rightarrow p = \frac{2}{3}$$

$$\therefore P(X=0) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

20)

Sección 2, v. 9.

$X =$ "nº de ovos colocados na folha por um inseto"

$\gamma = "$ no de obs observados "

tenor:

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \rightarrow \text{dist de Poisson}$$

$$P(Y=i) = P(X=i | X>0)$$

$$P(X=x | Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$$

$$E \cap \bar{a} \bar{b}$$

$$E(Y) = \sum_{i=0}^{\infty} i P(X=i) = \sum_{i=0}^{\infty} i P(X=i | X>0) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{P(X=i, X>0)}{P(X>0)} = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{P(X=i)}{1-P(X=0)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \cdot \frac{1}{1 - (e^{-\lambda} \lambda^0)} = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\lambda}}$$

$$E(X) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}$$

$$E(Y) = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}$$

27)

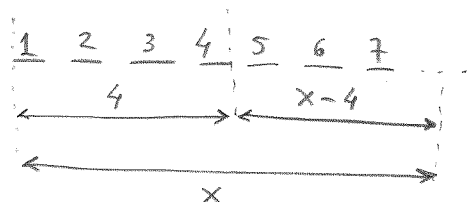
Sejam:

X : "nº de jogos que você joga"

Y : "nº de jogos que você perde"

a) Valor esperado do nº de jogos que você deve jogar.

Depois do quarto jogo, você continuará a jogar até perder.



$\rightarrow (X-4)$ é uma v.a. com dist. geométrica com parâmetro $(1-p)$.

ganha: p

perde: $1-p$

↓
para quando perde

Então:

$$E(X) = E(4 + (X-4)) = E(4) + E(X-4) = 4 + \frac{1}{1-p}$$

$$E(X) = 4 + \frac{1}{1-p}$$

b) O nº esperado de jogos que você perde:

Sejam as v.a.: Y : "nº de jogos que você perde"

Z : "nº de derrotas nos 4 primeiros jogos"

Então Z tem dist. binomial com $n=4$ e prob. de sucesso $(1-p)$ (derrota).

Como você não vai perder mais um jogo depois da quarta partida: $Y = Z + 1$

Então:

$$E(Y) = E(Z+1) = E(Z) + 1 = 4(1-p) + 1$$