

Lista 2

6)

Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda F_1 , 30% de uma fazenda F_2 e 50% de F_3 . Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por F_1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para F_2 e F_3 , essa porcentagem era de 5% e 2%, respectivamente.

Na indústria de sorvetes, os galões de leite são armazenados em um refrigerador sem identificação das fazendas. Um galão é escolhido aleatoriamente e verificou-se que o leite está adulterado. Qual é a probabilidade de que o leite tenha sido fornecido pela fazenda:

- a) F_1 b) F_2 c) F_3 ?

Solução:

a) Vamos denotar o evento A :

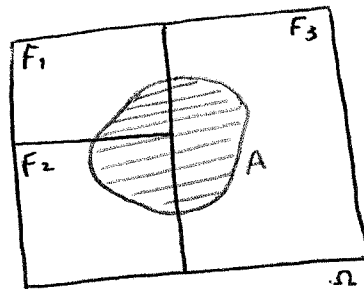
$A = \text{"o leite está adulterado"}$

Assim:

$$P(A|F_1) = 0,2$$

$$P(A|F_2) = 0,05$$

$$P(A|F_3) = 0,02$$



Além disso:

$$P(F_1) = 20\% = 0,2$$

$$P(F_2) = 30\% = 0,3$$

$$P(F_3) = 50\% = 0,5$$

Usando o teorema de Bayes:

$$P(F_1|A) = \frac{P(F_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|F_1)P(F_1)}{P(A|F_1)P(F_1) + P(A|F_2)P(F_2) + P(A|F_3)P(F_3)}$$

$$= \frac{0,2 \cdot 0,2}{0,2 \cdot 0,2 + 0,05 \cdot 0,3 + 0,02 \cdot 0,5} = 0,615$$

$$b) P(F_2|A) = 0,231$$

$$c) P(F_3|A) = 0,154$$

7)

~~16~~16

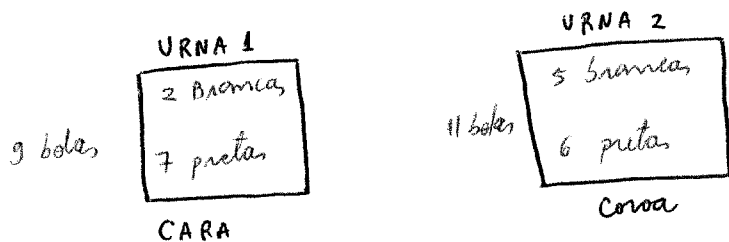
Considere duas urnas. A primeira contém duas bolas brancas e sete bolas pretas. A segunda contém cinco bolas brancas e 6 pretas. Nós lançamos uma moeda e retiramos uma bola da primeira urna se sair cara, ou da segunda se sair coroa. Qual é a prob. condicional de que o lançamento da moeda foi cara, dado que uma bola branca foi retirada?

Solução:

Sejam os eventos:

W = "uma bola branca foi retirada"

H = "sair cara"



Assim:

$$P(W|H) = 2/9$$

$$P(H) = P(\bar{H}) = \frac{1}{2}$$

$$P(W|\bar{H}) = 5/11$$

Usando o Teorema de BAYES:

$$P(H|W) = \frac{P(W|H) P(H)}{P(W|H) P(H) + P(W|\bar{H}) P(\bar{H})} = \frac{2/9 \cdot 1/2}{2/9 \cdot 1/2 + 5/11 \cdot 1/2} = \frac{22}{67}$$

9) Queremos determinar:

$$P(\text{uma pessoa tem a doença} \mid \text{teste positivo})$$

Vamos definir os eventos:

$$D = \{ \text{a pessoa tem a doença} \}$$

$$E = \{ \text{o teste é positivo} \}$$

Assim:

$$P(D|E) = ?$$

As informações do problema:

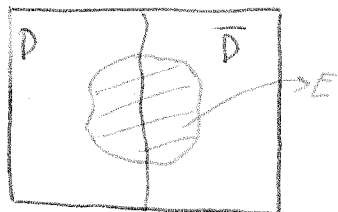
$$P(D) = 0,5\% = 0,005 \rightarrow \text{prob. de uma pessoa ter a doença.}$$

$$P(E|D) = 0,95 \rightarrow \text{prob. do teste ser positivo em uma pessoa doente.}$$

$$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 0,995 \rightarrow \text{prob. de uma pessoa não ter a doença.}$$

$$P(E|\bar{D}) = 0,01 \rightarrow \text{prob. da pessoa não ter a doença e o teste ser positivo.}$$

a partição do espaço amostral:



$$P(E) = P(D \cap E) + P(\bar{D} \cap E) =$$

$$= P(E|D) \cdot P(D) + P(\bar{D}) \cdot P(E|\bar{D})$$

Vamos então calcular:

$$P(E) = P(E|D)P(D) + P(E|\bar{D})P(\bar{D})$$

$$P(D|E) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)}$$

$$\text{mas: } P(D \cap E) = P(E|D) \cdot P(D)$$

Assim:

10)

Um saco contém 3 moedas, uma das quais foi cambiada com duas caras, enquanto que as duas outras moedas são normais e não-viciadas. Uma moeda é retirada do saco ao acaso e jogada quatro vezes em sequência. Se sair cara todas as vezes, qual será a prob. de que a moeda seja de duas caras?

Vamos definir os eventos:

A = "sair cara 4 vezes seguidas"

B = "a moeda tem duas caras"

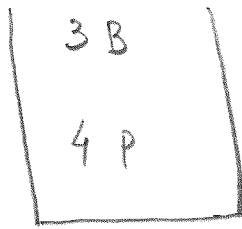
então, desejamos:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$\downarrow$
 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

$$P(B|A) = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{24}{27}$$

13)

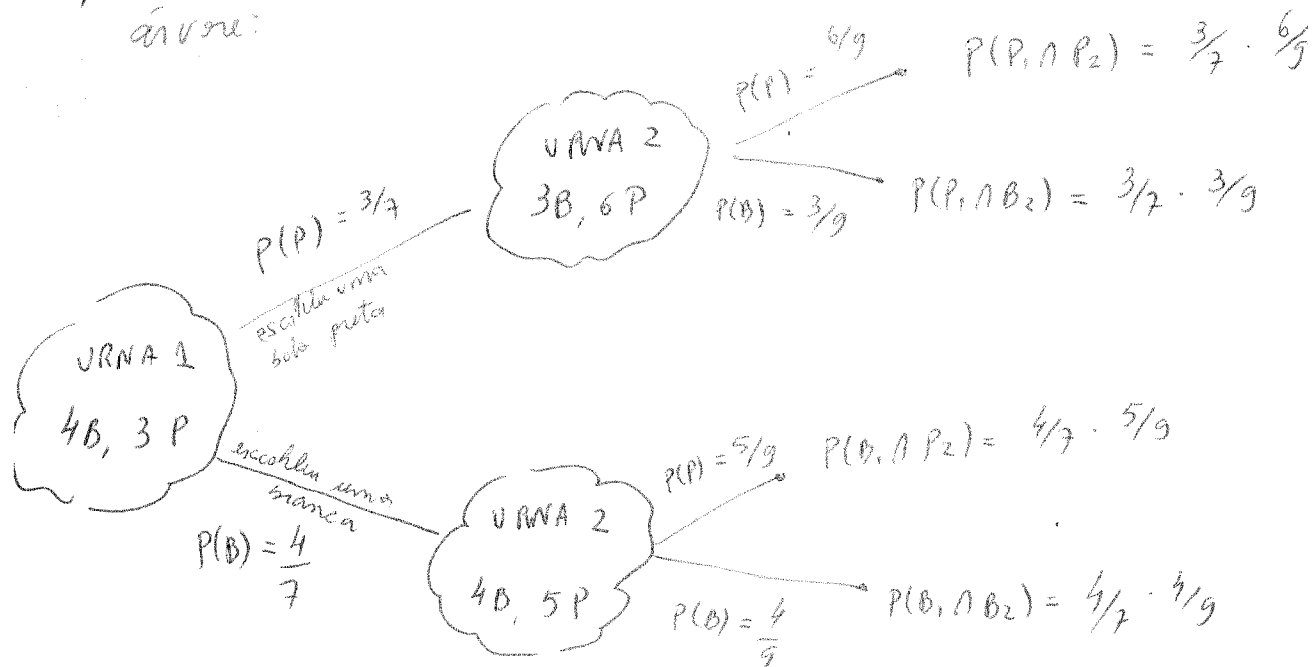


A = "bolas com cores diferentes"

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(\text{"bola 1 é preta"} \cap \text{"bola 2 é branca"}) + \\
 &\quad + P(\text{"bola 1 é branca"} \cap \text{"bola 2 é preta"}) = \\
 &= P(\text{"bola 1 é preta"}) \cdot P(\text{"bola 2 é branca"} \mid \text{"bola 1 é preta"}) + \\
 &\quad + P(\text{"bola 1 é branca"}) \cdot P(\text{"bola 2 é preta"} \mid \text{"bola 1 é branca"}) = \\
 &= \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{42} + \frac{12}{42} = \frac{12}{21} = \boxed{\frac{4}{7}}
 \end{aligned}$$

15) Vamos representar o problema por um diagrama de árvore:

2



Assim, para tirarmos uma bola branca no segundo saca:

$$A = \{ (P_1 \cap P_2), (B_1 \cap P_2) \}$$

Portanto:

$$P(A) = P[(P_1 \cap P_2) \text{ ou } (B_1 \cap P_2)] = P(P_1 \cap P_2) + P(B_1 \cap P_2) =$$

$$= P(P_1) \cdot P(P_2|P_1) + P(B_1) \cdot P(P_2|B_1) =$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{6}{9} + \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{9} = \frac{38}{63}$$

17)

Queremos determinar:

$$P(\text{"ser culpado"} \mid \text{"o suspeito tem a característica"}).$$

Sejam os eventos:

A: "o sujeito é culpado"

B: "o sujeito tem a característica".

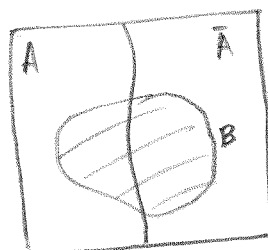
Temos:

$$P(A) = 0,6$$

$$P(B \mid \bar{A}) = 0,2 \rightarrow 20\% \text{ da população tem a característica.}$$

$$P(B \mid A) = 1$$

Usando o Teorema de BAYES:



$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \bar{A})P(\bar{A})} =$$

$$= \frac{1 \cdot 0,6}{1 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot (1 - 0,6)} = \frac{0,6}{0,6 + 0,2 \cdot 0,4} = \boxed{0,88}$$

* $P(B \mid A) = 1$ pois o sujeito culpado tem a característica.

18) Estamos interessados na seguinte questão:

3

$$P(\text{o outro lado puto} \mid \text{um lado é vermelho}) = ?$$

Vamos considerar os seguintes eventos:

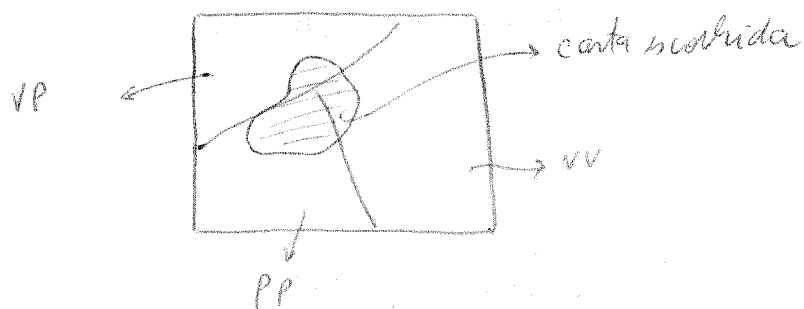
$VV = \{ \text{a carta escolhida é toda vermelha} \}$

$PP = \{ \text{a carta escolhida é toda preta} \}$

$VP = \{ \text{a carta tem um lado vermelho, outro preto} \}$

$V = \{ \text{o lado mostrado é vermelho} \}$

Então, desejamos:
$$P(VP \mid V) = \frac{P(VP \cap V)}{P(V)}$$



Temos:

$$P(V \mid VP) = \frac{1}{2}$$

$$P(V \mid PP) = 0$$

$$P(V \mid VV) = 1$$

$$P(VP) = \frac{1}{3} \quad (3 \text{ cartas})$$

$$P(PP) = \frac{1}{3}, \quad P(VV) = \frac{1}{3}$$

Agora:

$$P(VP \mid V) = \frac{P(V \mid VP) \cdot P(VP)}{P(V \mid VP) \cdot P(VP) + P(V \mid VV) \cdot P(VV) + P(V \mid PP) \cdot P(PP)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

→ SIMULAÇÃO : (Matlab)

1) O problema de Monty-Hall:

```
clear;
close;
N = 1000;
lose = 0;
for i = 1:N
    car = floor(rand()*3) + 1;
    selected = floor(rand()*3) + 1;
    if (car == selected)
        lose = lose + 1;
    end
end
disp('Porcentagem de vitórias:');
win = (N - lose) / N;
```

2) Lançamento de uma moeda:

```
clear;
close all;
N = 1000; p = 0,5;
ncorres = 0;
for i = 1:N
    if (rand() < p)
        ncorres = ncorres + 1;
    end
end
fcorres = ncorres / N;
disp(fcorres);
```