E1 Homotopia

Definição E1.1. Sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas entre e.t.
Dizemos que **f é homotópica a g** ($f \simeq g$) se existe uma função contínua

$$H : X \times [0,1] \to Y$$

tal que $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$, para todo $x \in X$.
H é dita homotopia entre f e g. ★

Proposição E1.2. *A relação $\simeq$ é relação de equivalência.*
Logo divide o conjunto das funções contínuas de X em Y em classes de equivalência ditas **classes de homotopia**. ◁

Proposição E1.3. *Sejam $f_1, f_2 : X \to Y$ e $g_1, g_2 : Y \to Z$ com $f_1 \simeq f_2$ e $g_1 \simeq g_2$, então*

$$g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2 \,. \qquad \triangleleft$$

Exemplo E1.4.
- Todas as funções contínuas $f : X \to Y$ com $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo são homotópicas: tome $H(x,t) = (1-t)f_1(x) + tg_2(x)$;
- $f_{1,2} : X \to (\{1,2\}, \mathcal{T}_d) : f_i(x) = i$ não são homotópicas;
- se $Y = S^n$ e
  - $f(x) \neq -g(x)\, \forall x \in X$ então $f \simeq g$
  - f, g não são subrejetoras então $f \simeq g$

  (caso contrário, poderiam não ser homotópicas: ex $id_{S^1} \not\simeq c$). ★

E1.1 Espaço contráctil

Definição E1.5. Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é dito **contrátil** se $Id_X \simeq c$ onde c é função constante. ★

Exemplo E1.6.
- Se $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo então é contrátil (em particular $\mathbb{R}^n$, suas bolas e cubos,...);
- o gráfico de $f : X \to Y$ contínua com X contrátil é contrátil;
- $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}_S$ não são contráteis (veja prop. abaixo)

- as esferas S^n não são contráteis (veremos isso para S^1).
- as esferas S^n com um ponto retirado são contráteis

★

Proposição E1.7.

- *Um espaço topológico contrátil é conexo por caminhos.*
- *Um espaço topológico Y é contrátil se e só se, para um qualquer e.t. X, todas as funções contínuas $f : X \to Y$ são homotópicas.* ◁

E1.2 Espaços homotopicamente equivalentes

Definição E1.8. Dizemos que os e.t. X e Y são **homotopicamente equivalentes** se existem funções contínuas $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tais que $f \circ g \simeq id_Y$ e $g \circ f \simeq id_X$.
Dizemos que f e g são **inversas homotópicas**. ★

> Caso particular: a definição de "X é contrátil" equivale a "X é homotopicamente equivalente a $\{p\}$".

Proposição E1.9. *A relação "homotopicamente equivalentes" é relação de equivalência.* ◁

Exemplo E1.10.

- espaços homeomorfos são homot. equiv. ($f \circ f^{-1} = id$).
- espaços homot. equiv podem não ser homeomorfos: p.e. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ (contráteis não homeomorfos).
- $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ é homot. equiv. a S^n (veremos abaixo). ★

E1.3 Retração

Definição E1.11. Dado $A \subseteq X$, chamamos

- **retração de X a A** uma função contínua $r : X \to X$ tal que $r(X) \subseteq A$ e $r|_A = id_A$.
- r é dita **retração de deformação de X a A** se vale $r \simeq id_X$

Nestes casos A é dito **retração**[a] (resp. retração de deformação) de X. ★

> Caso particular: A definição de "X é contrátil" equivale a "existe uma retração de deformação de X a um ponto"

[a]também é usado o termo retrato

Proposição E1.12.

- *Se A é retração de X Hausdorff então A é fechado.*
- *Se A é retração de deformação de X então A e X são homot. equiv.* ◁

Exemplo E1.13.

- $r : X \to X : x \mapsto x_0$ é sempre uma retração, mas é retraç. de def. só se X é contrátil.
- $r : X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to X : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ é uma retração de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ a S^n. $H : X \times [0,1] \to X : (\mathbf{x}, t) \mapsto (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ é uma homotopia entre id_X e r: S^n é retração de deformação de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, logo também são homot. equiv.
- bolas fechadas em $\mathbb{R}^n$ são retrações de deformação de $\mathbb{R}^n$;
- não existe retração de $\mathbb{R}^{n+1}$ a S^n (para $n = 1$ veremos isso mais tarde): não são homot. equiv.

★

E1.4 Homotopia relativa

Definição E1.14. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos, $A \subseteq X$ e $f, g : X \to Y$ funções contínuas tais que $f|_A = g|_A$.

Dizemos que **f e g são homotópicas relativamente a A** ($f \overset{A}{\simeq} g$) se existe uma função contínua

$$H : X \times [0, 1] \to Y$$

tal que

- $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$
- $H(a, \cdot)$ é constante para todo $a \in A$. ★

Exemplo E1.15. Sejam $f_i : [0, \pi] \to S^1 : t \mapsto (\cos(t), (-1)^i \sin(t))$

entao $\boxed{f_1 \simeq f_2}$ mas $\boxed{f_1 \overset{\{0;\pi\}}{\not\simeq} f_2}$

★

Exercícios

Exercício. Considere P sendo o espaço do pente com o ponto $(0, 0)$ adicionado:

- mostre que P é conexo por caminhos
- mostre que P é contrátil (em particular é homot. equiv a um ponto, existe uma retração de deformação a um (qualquer) seu ponto e $id_P \simeq p$ para qualquer $p \in P$)
- mostre que não é verdade que $id_P \overset{\{p\}}{\simeq} p$ para $p = (0, 1)$. ★

E1.5 Espaços com ponto base

Definição E1.16.
- (X, x_0) é dito um **espaço com ponto base** se X é um espaço topológico e $x_0 \in X$.
- Escrevemos $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ se $f : X \to Y$ e $f(x_0) = y_0$.
- Dizemos que (X, x_0) e (Y, y_0) são **homotopicamente equivalentes** se existem $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ e $g : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ contínuas tais que $f \circ g \overset{y_0}{\simeq} Id_Y$ e $g \circ f \overset{x_0}{\simeq} Id_X$.

★

Exemplo E1.17.
- Procure um exemplo de dois espaços X, Y homotopicamente equiv. mas não com oportunas escolhas de ponto base.

★

E1.6 Grupo fundamental

Definição E1.18. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e γ, δ dois caminhos em Y com $\gamma(0) = \delta(0) = x_0$ e $\gamma(1) = \delta(1) = x_1$.

- Dizemos que γ, δ são **caminhos homotópicos** se $\gamma \overset{\{0;1\}}{\simeq} \delta$ [a].
- Se $x_0 = x_1$ os caminhos são ditos **laços em x_0** e são ditos **laços homotópicos** ($\gamma \simeq_{x_0} \delta$) se satisfazem o acima.
- definimos a operação de concatenação de laços: $\gamma * \delta$ é o laço que percorrem γ e depois δ. [b] ★

[a] Ou seja, existe H(x,t) contínua com $H(\cdot, 0) = \gamma$, $H(\cdot, 1) = \delta$, $H(0, t) = x_0$ e $H(1, t) = x_1$.

[b] Especificamente $\gamma * \delta(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & t \in [0, 1/2], \\ \delta(2t - 1) & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$

Definição E1.19. No conjunto L dos laços em x_0 com a rel. de eq. $\simeq_{x_0}$ definimos o quociente $\pi_1(X, x_0) := L/ \simeq_{x_0}$.
Em $\pi_1(X, x_0)$ definimos a operação $[\gamma] * [\delta] = [\gamma * \delta]$. ★

Proposição E1.20. *$\pi_1(X, x_0)$ com a operação * é um grupo, dito* **grupo fundamental de X com respeito a x_0**. ◁

Lema E1.21.
Seja $\phi : [0, 1] \to [0, 1]$ contínua e γ um laço em x_0
- *se $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1$ então $\gamma \simeq_{x_0} \gamma \circ \phi$*
- *se $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 0$ então $(t \mapsto x_0) \simeq_{x_0} \gamma \circ \phi$* ◁

- um homomorfismo de grupos é uma função $f : G_1 \to G_2$ que preserva a operação: $f(x * y) = f(x) * f(y)$,
- um isomorfismo de grupos é um homomorfismo bijetor

Proposição E1.22. *Toda $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ contínua induz um homomorfismo (de grupos) $f_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$. Em particular,*

(a) $(Id_X)_\sharp = Id_{\pi_1(X, x_0)}$;

(b) Se $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ são tais que $f \overset{x_0}{\simeq} g$, então $f_\sharp = g_\sharp$;

(c) Se $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *e* $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$*, então* $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$*.* $\lhd$

Proposição E1.23. *Se* (X, x_0) *e* (Y, y_0) *são homotopicamente equivalentes, então* $\pi_1(X, x_0)$ *e* $\pi_1(Y, y_0)$ *são isomorfos.* $\lhd$

Corolário E1.24. *Se* $\pi_1(X, x_0)$ *e* $\pi_1(Y, y_0)$ *não são isomorfos, então não existe homeomorfismo de* X *em* Y *tal que* $f(x_0) = y_0$*.* $\lhd$

Exercícios

Exercício E1.25. Mostre as afirmações a seguir:

- Se (X, x_0) é homotopicamente equivalentes a $(\{x_0\}, x_0)$ então $\pi_1(X, x_0)$ é trivial.
- Se X é conexo por caminhos e $x_1, x_0 \in X$ então $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos.
- $\pi_1(X, x_0)$ só depende da comp. conexa por caminhos de x_0.
- O grupo fundamental de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{p\}$ e de S^n (com resp. a qualquer ponto) são isomorfos.

★

E1.7 Espaços de recobrimento

Definição E1.26. Dado um e.t. $(Y, \mathcal{T})$, chamamos **espaço de recobrimento** uma dupla[a] $(\widetilde{Y}, \widetilde{\mathcal{T}})$ junto com uma função contínua e sobrejetora $p : \widetilde{Y} \to Y$ satisfazendo:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{para todo } x \in Y \text{ existe uma viz. } V \text{ de } x \text{ tal que} \\ p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} V_\alpha \text{ sendo os } V_\alpha \in \widetilde{\mathcal{T}}, \text{ disjuntos e as } p|_{V_\alpha} \text{ homeomorfismos de } V_\alpha \text{ em } V.\end{array}} \tag{E1.1}$$

Em particular, $p^{-1}(\{c\})$ é discreto. ★

[a] Frequentemente dizemos apenas que $p : \widetilde{Y} \to Y$ é um espaço de recobrimento. Em [**Munk**] são ditos esp.d.Rec o $\widetilde{Y}$ e aplicação de rec. a função p.

Exemplo E1.27.

- Exemplos triviais:
  - $id : X \to X$ é espaço de recobrimento
  - $p : X \times D : (x, d) \mapsto x$ com D discreto é espaço de recobrimento
- Exemplo típico:

$$p : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)); \tag{E1.2}$$

- $p : S^1 \to S^1 : \theta \mapsto k\theta$ (em coord polares) com $k \in \mathbb{N}$.

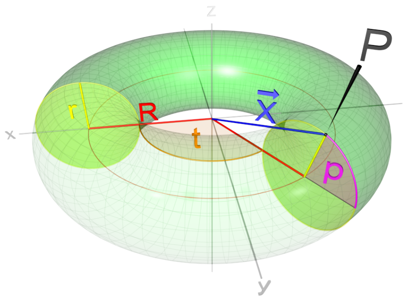
★

Proposição E1.28.

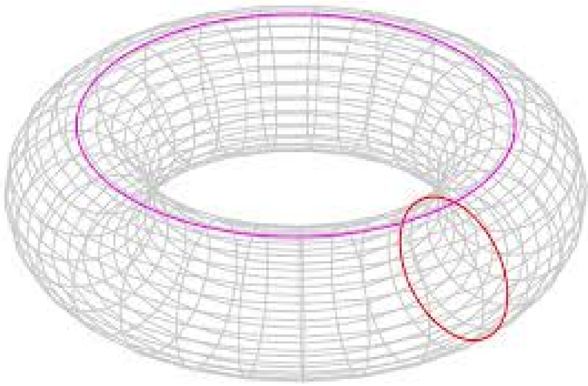
- *Dado um esp. de rec.* $p : \widetilde{Y} \to Y$ *e* $Z \subseteq Y$, *vale que* $\widetilde{p} : p^{-1}(Z) \to Z : x \to p(x)$ *é espaço de recobrimento*
- *Dados esp. de rec.* $p_{1,2} : \widetilde{Y}_{1,2} \to Y_{1,2}$, *vale que* $P : \widetilde{Y}_1 \times \widetilde{Y}_2 \to Y_1 \times Y_2 : (y_1, y_2) \mapsto (p_1(y_1), p_2(y_2))$ *é espaço de recobrimento.* ◁

Exemplo E1.29.

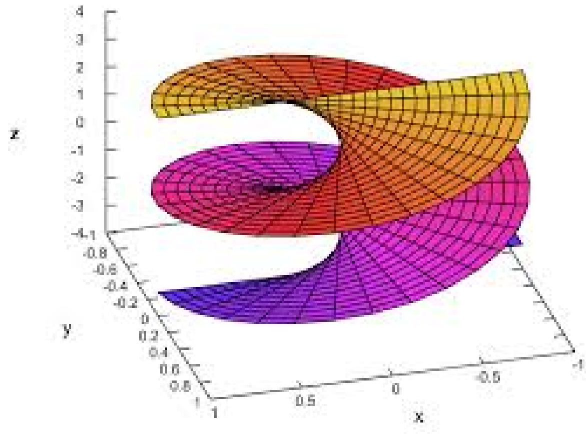
- O produto de dois espaços de rec. (E1.2) para S^1 produze um esp.de rec. para $T^2 := S^1 \times S^1$ (com domínio $\mathbb{R}^2$).



- Tomando p esp. de rec. para T^2 como acima, seja E o conjunto na figura (espaço digito oito), então $\widetilde{p} : p^{-1}(E) \to E : x \mapsto p(x)$ é esp. de rec. para E.



- O produto do espaço de rec. (E1.2) para S^1 com id_I (I intervalo em $\mathbb{R}$) produz um esp.de rec. para um cilindro $S^1 \times I$;
- tomando p esp. de rec. para $S^1 \times (0, \infty)$ como acima e compondo com o homeomorfirsmo $h : S^1 \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} : (\mathbf{x}, t) \mapsto t\mathbf{x}$ produz um esp.de rec. para $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$;


z
y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1
0.5
0
-0.5
-1

★

E1.8 Levantamentos

Definição E1.30. Dados X, Y espaços topológicos, $f : X \to Y$ contínua e $p : \widetilde{Y} \to Y$ um espaço de recobrimento. Dizemos que $\widetilde{f} : X \to \widetilde{Y}$ é um **levantamento de f** se $f = p \circ \widetilde{f}$.

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{Y} \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

★

Exemplo E1.31. Usando o esp. de rec. (E1.2), caminhos $\gamma : [0,1] \to S^1 : t \mapsto (\cos(\alpha\, 2\pi t), \sin(\alpha\, 2\pi t))$ levantam a $\widetilde{\gamma}(t) = \alpha\, t$.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"] & S^1 \end{tikzcd}$$

★

E1.8.1 Construção de levantamentos

Proposição E1.32. *Sejam $p : \widetilde{Y} \to Y$ um esp. de rec. e $f : X \to Y$ uma função contínua.*

- *Se $\widetilde{f}, \widehat{f}$ são dois levantamentos de f então vale que*
  - $\{x \in X : \ \widetilde{f} = \widehat{f}\}$ *é aberto e fechado;*
  - *se X é conexo e $\widetilde{f}, \widehat{f}$ coincidem em um ponto então $\widetilde{f} = \widehat{f}$.*
- *se $C \subseteq X$ é conexo e $f(C) \subseteq V$ satisfazendo (E1.1), então para qualquer levantamento $\widetilde{f}$ de f existe $\alpha \in \mathscr{A}$ tal que $\widetilde{f}(C) \subseteq V_\alpha$.*
- *se $A, B \subseteq X$ são ambos abertos (ou ambos fechados) com $A \cap B$ conexo e não vazio, tais que*
  - $\widetilde{f} : A \to \widetilde{Y}$ *é um levantamento de $f|_A$,*

- *$f(B) \subseteq V$ satisfazendo (E1.1),*

então $\widetilde{f}$ pode ser extendido a $A \cup B$ como um levantamento contínuo de $f|_{A\cup B}$. ◁

Proposição E1.33. *Seja $X = [0,1]\times[0,1]$ ou $X = [0,1]$. Dados um esp. de rec. $p : \widetilde{Y} \to Y$, $f : X \to Y$ contínua e $x_0 \in X$, $\widetilde{y}_0 \in \widetilde{Y}$ tais que $f(x_0) = p(\widetilde{y}_0)$, existe um único levantamento $\widetilde{f}$ de f tal que $\widetilde{f}(x_0) = \widetilde{y}_0$.* ◁

Teorema E1.34. *Sejam $p : \widetilde{Y} \to Y$ um esp. de rec. e $H : [0,1]\times[0,1] \to Y$ uma homotopia entre caminhos em Y.*

Fixado $\widetilde{y}_0 \in \widetilde{Y}$ tal que $p(\widetilde{y}_0) = H(0,0)$, existe um único levantamento $\widetilde{H}$ de H tal que $\widetilde{H}(0,0) = \widetilde{y}_0$; além disso, $\widetilde{H}$ é uma homotopia de caminhos em $\widetilde{Y}$, entre $\widetilde{H}(\cdot,0)$ e $\widetilde{H}(\cdot,1)$.

Analogamente, se $\gamma : [0,1] \to Y$ é um caminho em Y, fixado $\widetilde{y}_0 \in \widetilde{Y}$ tal que $p(\widetilde{y}_0) = \gamma(0)$, existe um único levantamento $\widetilde{\gamma}$ de γ tal que $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{y}_0$ ◁

Corolário E1.35. *Sejam γ, δ caminhos de y_0 a y_1 e $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\delta}$ levantamentos com $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{\delta}(0)$.*

- *Se γ, δ são caminhos de y_0 a y_1 homotópicos então $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\delta}$ são caminhos de $\widetilde{\gamma}(0)$ a $\widetilde{\gamma}(1)$ homotópicos.*
- *Se $\widetilde{\gamma}(1) \neq \widetilde{\delta}(1)$ então γ, δ não são caminhos homotópicos.* ◁

Aplicação

Teorema E1.36. *O grupo fundamental de S^1 é isomorfo a ao grupo $(\mathbb{Z}, +)$.* ◁

Algumas consequências

- S^1 não é contrátil; $Id_{S^1} \not\simeq c$;
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ não é homeomorfo (nem homot. equiv) a $\mathbb{R}^2$; não existe retração de $\mathbb{R}^2$ a S^1;
- $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^n$ com $n > 2$??? não são homeomorfos

$\pi_1(S^n, x_0)$ é trivial para $n \geq 2$: intuitivamente... podemos deformar qualquer laço dentro de S^n até um ponto O memso para $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{p}\}$

$\pi_1(T^2, x_0) = \mathbb{Z}^2$ $\pi_1(T^n, x_0) = \mathbb{Z}^n$

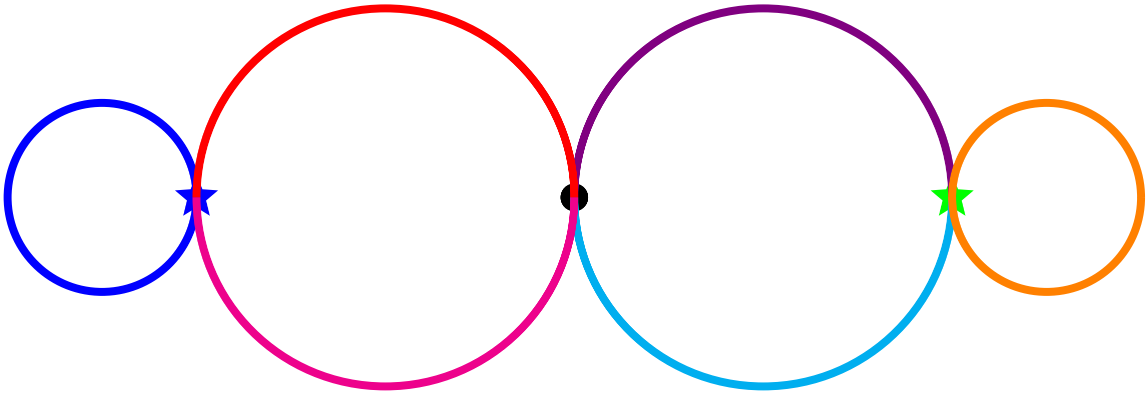
em particular, é um grupo comutativo

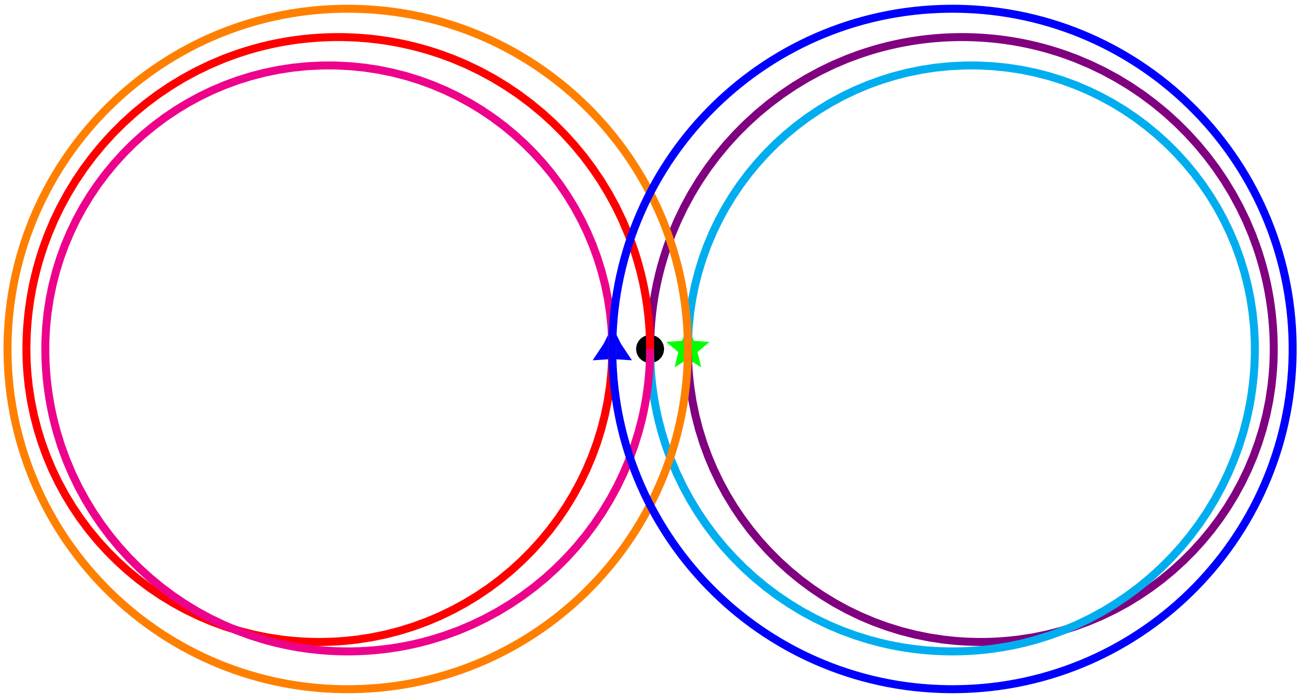
usa

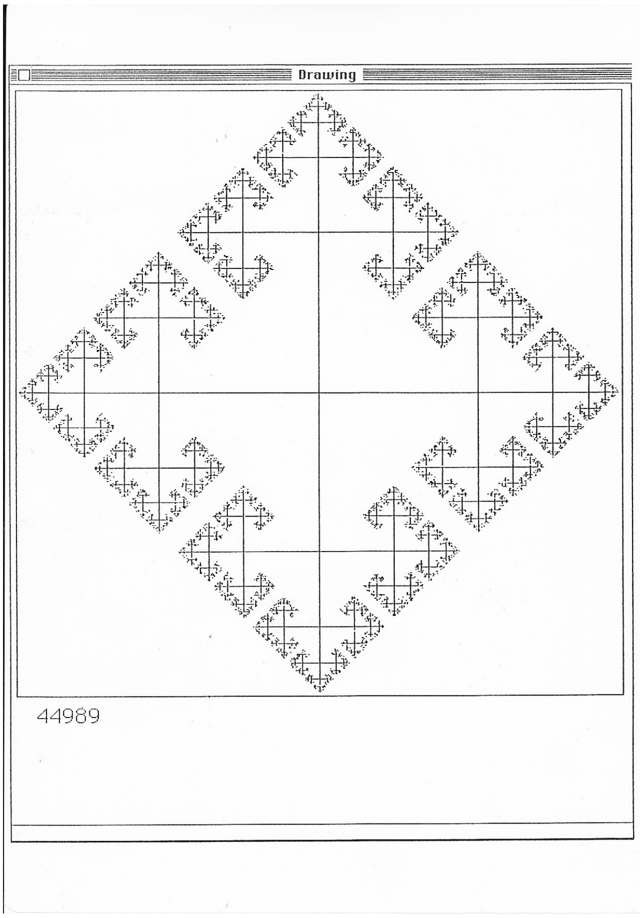
Proposição E1.37. *o grupo fundamental de um produto (finito) é isomorfo ao produto dos grupos fundamentais* $\triangleleft$

o grupo fundamental do espaço digito 8 é não comutativo (grupo livre de dois geradores)

Uma forma de ver isso é usando este espaço de recobrimento:






Drawing
44989

Lista dos teoremas

Lista dos exercícios