

## D1 Compactos

**Definição D1.1.** Uma família de conjuntos  $\mathcal{R}$  é um **recobrimento** (ou cobertura) de  $X$  se  $X = \bigcup_{A \in \mathcal{R}} A$ .

Um e.t.  $(X, \mathcal{T})$  é dito **compacto** se todo recobrimento aberto de  $X$  possui um subconjunto finito que ainda é um recobrimento de  $X$  (sub-cobertura).

★

### Exemplo D1.2.

- Todo conjunto finito é compacto;
- todo conjunto é compacto com a topologia caótica;
- com a topologia discreta, um conjunto é compacto se e só se é finito;
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf})$  é compacto,  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cc})$  não é compacto.

★

### Exercícios

**Exercício.** Verifique as afirmações do exemplo acima.

★

**Exercício.** Mostre que ser compacto é um invariante topológico.

★

**Exercício.** Mostre que uma formulação equivalente para a definição de compacto é que "toda família de fechados  $\mathcal{F}$  tal que  $\bigcap_{F \in \mathcal{F}_n} F \neq \emptyset$  para qualquer  $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$  finito (propriedade da interseção finita) satisfaz  $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$ ".

★

**Exercício.** Mostre que se  $\mathcal{B}$  é uma base para  $(X, \mathcal{T})$  e toda cobertura feita por elementos de  $\mathcal{B}$  possui uma sub-cobertura finita então  $X$  é compacto (ou seja, podemos testar apenas recobrimentos feitos por elementos de  $\mathcal{B}$ ).

★

### Exemplo D1.3.

- $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}_S$  não são compactos: considere  $\{(-n, n), n \in \mathbb{N}\}$  e  $\{[-n, n), n \in \mathbb{N}\}$ , respectivamente;
- $(0, 1)$  não é compacto: considere  $\{(1/n, 1), n \in \mathbb{N}\}$ ;
- $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$  (subesp. de  $\mathbb{R}$ ) é compacto (verifique);
- $[0, 1]$  é compacto: veja exercício D1.11;
- nem  $[0, 1)$  nem  $[0, 1]$  são compactos em  $\mathbb{R}_S$ : considere  $\{[0, 1 - 1/n), n \in \mathbb{N}\}$  e adicione o (aberto)  $\{1\}$  para o segundo.

- $Y = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  subesp de  $\mathbb{R}$  não é compacto: considere por exemplo  $\{Y \cap (-1, \sqrt{2} - 1 - 1/n), n \in \mathbb{N}\} \cup \{Y \cap (\sqrt{2} - 1, 2)\}$  ★

**Proposição D1.4.** *Subespaço fechado de espaço compacto é compacto.* ◁

**Proposição D1.5.** *Seja  $(X, \mathcal{T})$  de Hausdorff, então*

- *para todo  $K$  compacto e  $x \notin K$ , existem abertos disjuntos  $A, B$  tais que  $K \subseteq A$  e  $x \in B$ .*
- *para todos  $K, H$  compactos disjuntos existem abertos disjuntos  $A, B$  tais que  $K \subseteq A$  e  $H \subseteq B$ .*
- **todo subespaço compacto é fechado.**
- *Em particular, se  $X$  é compacto e Hausdorff, então um seu subespaço é compacto se e só se é fechado.* ◁

**Observação D1.6.** A hipótese  $X$  Hausdorff é necessária: em  $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$  todo conjunto é compacto, mas apenas os finitos são fechados. ★

**Corolário D1.7.** *Todo espaço de Hausdorff compacto é normal.* ◁

## Exercícios

**Exercício ((EX3a-26)).** Mostre que se  $(X, \mathcal{T})$  é compacto e Hausdorff então vale

- se  $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{S}$  então  $(X, \mathcal{S})$  não é compacto;
- se  $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{T}$  então  $(X, \mathcal{S})$  não é hausdorff; ★

**Exercício ((EX3b-26)).** Mostre que em espaços métricos todo compacto é fechado e limitado.

Mostre que em geral não vale a volta, mas vale em  $\mathbb{R}^N$  com a métrica euclidiana. ★

## D1.1 Funções em compactos

**Proposição D1.8.** *Seja  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$  contínua*

- *se  $X$  compacto, então  $f(X)$  é compacto;*
- *se  $Y$  é Hausdorff e  $F \subseteq X$  é compacto então  $f(F)$  é compacto e logo fechado.*
- *se  $f$  é bijetora com  $Y$  Hausdorff e  $X$  compacto, então  $f$  é homeomorfismo. ◁*

**Lema D1.9 [Da sub-base de Alexander].** *Se  $\mathcal{S}$  é uma sub-base para  $(X, \mathcal{T})$  e toda cobertura feita por elementos de  $\mathcal{S}$  possui uma subcobertura finita então  $X$  é compacto (podemos testar apenas recobrimentos feitos por elementos de  $\mathcal{S}$ ).*  $\triangleleft$

**Observação D1.10.** No lema acima é necessário o uso de Lema de Zorn. Com o lema acima será fácil provar o Teorema de Tychonoff.

Mesmo usando outros caminhos para provar o Teorema de Tychonoff, sempre precisa usar alguma variação do axioma da escolha.  $\star$

**Lema de Zorn** *Se  $X$  é um conjunto parcialmente ordenado e todo subconjunto totalmente ordenado de  $X$  tem um limitante superior então  $X$  tem um elemento maximal.*

**Conjunto parcialmente ordenado:** quando existe uma relação de ordem " $\preceq$ " nele;

**Conjunto totalmente ordenado:** quando dados  $x, y$  quaisquer  $x \preceq y$  ou  $y \preceq x$ ;

**Limitante superior** de  $Y \subseteq X$ :  $l \in X$  t.q.  $y \preceq l$  para todo  $y \in Y$ .

$m \in X$  é **elemento maximal** de  $X$ :  $x \in X$  e  $m \preceq x \implies m = x$ .

São afirmações equivalentes (Princípios da teoria dos conjuntos)

**Lema de Zorn,**

**Princípio da Boa Ordenação,**

**Princípio Maximal de Hausdorff,**

**Axioma da Escolha**

Construção para aplicação do Lema de Zorn:

- seja  $\mathcal{C}$  a família de todas as coberturas abertas que não possuem subcobertura finita
- para  $C, D \in \mathcal{C}$  seja  $C \preceq D$  se  $C \subseteq D$  (assim  $\mathcal{C}$  é parcialmente ordenado);
- se  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  é totalmente ordenado então  $\bigcup_{C \in \mathcal{C}'} C$  é um limitante superior de  $\mathcal{C}'$
- $M$  elemento maximal de  $\mathcal{C}$  é uma cobertura aberta que não possui subcobertura finita mas tal que adicionando qualquer novo aberto possuiria subcobertura finita.

### Exercícios

**Exercício D1.11.** Mostre que  $[0, 1]$  é compacto: note que os conjuntos  $[0, a)$  e  $(b, 1]$  com  $0 < a, b < 1$  formam uma sub-base.

Mostre também sem usar o lema da sub-base: dada uma cobertura aberta, defina

$$\sup\{a : [0, a] \text{ pode ser coberto por finitos elementos da cobertura}\}$$

e mostre que vale 1.



## D1.2 Teorema de Tychonoff

**Teorema D1.12 [de Tychonoff].** *Produto de compactos é compacto.*

◁

**Corolário D1.13.** *A topologia produto é a única que faz com que as projeções sejam contínuas e o produto de compactos de Hausdorff seja compacto.*

◁

**Corolário D1.14.** *Um e.t. é completamente regular se e só se é homeomorfo a um subespaço de algum compacto Hausdorff.*

◁

### Observação D1.15.

- Qualquer espaço compl.reg. não normal é homeomorfo a um subespaço  $S$  de um Hausdorff compacto  $N$ ; então  $S$  é um **subespaço não normal de um espaço normal**.  
O plano de Sorgenfrey é um exemplo desta situação.
- Vale a volta do teorema de Tychonoff: se um produto é compacto todos os fatores são compactos.
- O teorema de Tychonoff não valeria, em geral, com a topologia da caixa:  
 $\prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, 1\}$  não é compacto. ★

## Lista dos teoremas

D1.1	Definição (Compacto)	D1
D1.2	Exemplo	D1
D1.3	Exemplo	D1
D1.4	Proposição	D2
D1.5	Proposição	D2
D1.6	Observação	D2
D1.7	Corolário	D2
D1.8	Proposição	D3
D1.9	Lema (Da sub-base de Alexander)	D4
D1.10	Observação	D4
D1.11	Exercício	D5
D1.12	Teorema (de Tychonoff)	D6
D1.13	Corolário	D6
D1.14	Corolário	D6
D1.15	Observação	D6

## Lista dos exercícios

Exercício	D1
Exercício	D1
Exercício	D1
Exercício	D1
Exercício ((EX3a-26))	D2
Exercício ((EX3b-26))	D2