

C1 Extensão de funções contínuas

Definição C1.1. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos e Z subespaço de X . Dada $f : Z \rightarrow Y$ contínua, chamamos **extensão contínua de f a X** uma função $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ contínua, tal que $f = \tilde{f}|_Z$. ★

Proposição C1.2. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos sendo Y Hausdorff e $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas. Então $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ é fechado.

Em particular, se $f = g$ em um conjunto D denso em X então $f = g$. ◁

Observação C1.3. Nas condições acima, uma função contínua conhecida em um denso está univocamente identificada.

Porém nem toda função definida em um denso pode ser estendida a uma função contínua. ★

Definição C1.4. Seja (X, τ) espaço topológico e $F, G \subseteq X$ fechados disjuntos. Dizemos que F, G podem ser separados por uma função contínua se existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f(F) = \{0\}$ e $f(G) = \{1\}$. ★

Dois teoremas importantes.

Teorema C1.5 [Lema de Urysohn]. *Seja (X, τ) espaço topológico T_4 e sejam $F, G \subseteq X$ fechados disjuntos então eles podem ser separados por uma função contínua.* ◁

Teorema C1.6 [de Tietze]. *Seja $Y = [a, b]$, $Y = (a, b)$ ou $Y = \mathbb{R}$ com a topologia usual. Sejam (X, τ) espaço T_4 , $F \subseteq X$ fechado e $f : F \rightarrow Y$ função contínua. Então existe uma extensão contínua de f a X .* ◁

Observação C1.7.

- Se H é T_1 e $F \neq X$ a extensão nunca é única;
- se F não for fechado pode não existir extensão;
- A propriedade do Lema de Urysohn caracteriza T_4 : $f_{-1}([0, 1/2))$ e $f_{-1}((1/2, 1])$ são abertos disjuntos que separam F, G . Ou seja,

Dois fechados disjuntos podem ser separados por abertos se e só se podem ser separados por uma função contínua.



Lema C1.8. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Suponha que exista $(A_s)_{s \in \mathbb{Q}}$ família de abertos satisfazendo:*

1. $\overline{A_r} \subseteq A_s$ para $r < s$;
2. $\bigcup_{s \in \mathbb{Q}} A_s = X$;
3. $\bigcap_{s \in \mathbb{Q}} A_s = \emptyset$.

Então $f : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \in A_r\}$ é uma função contínua. ◁

Algumas passagens:

- $x \in \overline{A_r}$ implica $f(x) \leq r$
 - $x \in A_r^c$ implica $f(x) \geq r$
- viceversa
- $f(x) > r$ implica $x \notin \overline{A_r}$
 - $f(x) < r$ implica $x \in A_r$

Lema C1.9. *Sejam (X, τ) espaço T_4 , $F \subseteq X$ fechado e $\phi : F \rightarrow [-L, L]$ contínua. Então existe $g : X \rightarrow [-L, L]$ contínua tal que*

$$\begin{cases} |\phi - g| \leq \frac{2}{3}L & \text{em } F \\ |g| \leq \frac{1}{3}L & \text{em } X \end{cases} \quad \triangleleft$$

C1.1 Espaços completamente regulares ($T_{3\frac{1}{2}}$)

Pergunta

É também verdade que um fechado e um ponto podem ser separados por abertos se e só se podem ser separados por uma função contínua?

A resp é não: separar por funções é uma propriedade mais forte.

Definição C1.10. Dizemos que um espaço topológico é um **espaço $T_{3\frac{1}{2}}$** , se para todo F fechado e $x \notin F$, eles podem ser separados por uma função contínua.

Um espaço T_3 que é também T_1 é dito **completamente regular**. ★

?????

Proposição C1.11.

- $T_{3\frac{1}{2}} \implies T_3$
- $Normal \implies completamente\ regular \implies regular$.
- *subespaços e produtos de $T_{3\frac{1}{2}}$ são $T_{3\frac{1}{2}}$.* ◁

Porém,

- existem exemplos de espaços T_3 que não são $T_{3\frac{1}{2}}$ (espaço regular mas não completamente regular): veja [Aur22, Ex 3.2.17]^a;
- existem exemplos de espaços $T_{3\frac{1}{2}}$ que não são T_4 (espaço completamente regular não normal): um caso é o plano de Sorgenfrey.

^aVeja também em

<https://dantopology.wordpress.com/2012/09/01/regular-but-not-completely-regular/>

Exercícios

Exercício (Prova alternativa que métricos são normais). •

Mostre que em X e.m. e com $A \subseteq X$ não vazio, a função $f(x) = d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ é contínua

- Dados F, G fechados disjuntos, mostre que $g(x) = \frac{d(x, G)}{d(x, G) + d(x, F)}$ é contínua e separa F e G , o que implica T_4 .



Referências

[Aur22] L. Aurichi. *Notas de aula*. 2022, p. 163.

Lista dos teoremas

C1.1	Definição	C1
C1.2	Proposição	C1
C1.3	Observação	C1
C1.4	Definição	C2
C1.5	Teorema (Lema de Urysohn)	C2
C1.6	Teorema (de Tietze)	C2
C1.7	Observação	C2
C1.8	Lema	C2
C1.9	Lema	C3
C1.10	Definição	C4
C1.11	Proposição	C4

Lista dos exercícios

Exercício (Prova alternativa que métricos são normais)	C5
--	----