

B1 Propriedades de separação

Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é dito:

- **espaço T_0** : se $\forall x, y \in X$ distintos existe uma viz aberta de x que não contém y , ou viceversa

$$\forall x, y \in X \text{ distintos, } \exists A \in \mathcal{T} \text{ tal que } \begin{cases} x \in A, y \notin A \\ \text{ou} \\ x \notin A, y \in A \end{cases};$$

- **espaço T_1** : se $\forall x, y \in X$ distintos existe uma viz aberta de x que não contém y

$$\forall x, y \in X \text{ distintos, } \exists A \in \mathcal{T} \text{ tal que } x \in A, y \notin A;$$

- **espaço T_2** : se $\forall x, y \in X$ distintos existem uma viz. aberta de x e uma viz aberta de y que sejam disjuntas

$$\forall x, y \in X \text{ distintos, } \exists A, B \in \mathcal{T} \text{ tais que } x \in A, y \in B \text{ e } A \cap B = \emptyset;$$

- **espaço T_3** : se para todo F fechado e $x \notin F$, existem abertos disjuntos A, B tais que $F \subseteq A$ e $x \in B$;
- **espaço T_4** : se para todos F, G fechados disjuntos, existem abertos disjuntos A, B tais que $F \subseteq A$ e $G \subseteq B$;
- **espaço T_5** : se para todos F, G separados (ou seja, $\overline{F} \cap G = \emptyset = \overline{G} \cap F$) existem abertos disjuntos A, B tais que $F \subseteq A$ e $G \subseteq B$.

Propriedades simples

- Claramente $T_2 \implies T_1 \implies T_0$;
- não vale o viceversa: exemplo $\mathbb{N}$
 - com top caotica não é sequer T_0 ,

- com top $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\} \dots \{1, \dots, n\}, \mathbb{N}\}$ é apenas T_0 (não T_1),
- com top co-finita é apenas T_0, T_1 (não T_2),
- com top discreta é T_2 ;
- se os $\{x\}$ são fechados então $T_4 \implies T_3 \implies T_2$;
- $T_5 \implies T_4$.

Proposição B1.1. $(X, \mathcal{T})$ é espaço T_1 se e só se $\{x\}$ é fechado para todo $x \in X$. ◁

Corolário B1.2. $T_4 + T_1 \implies T_3 + T_1 \implies T_2 + T_1$ ◁

Definição B1.3.

- E.t. que satisfazem T_2 são ditos **espaços de Hausdorff**
- E.t. que satisfazem $T_3 + T_1$ são ditos **espaços regulares**
- E.t. que satisfazem $T_4 + T_1$ são ditos **espaços normais**
- E.t. que satisfazem $T_5 + T_1$ são ditos **espaços completamente normais** ★

As definições não são sempre assim... alguns textos chamam, por exemplo, regular o que chamamos T_3 e chamam T_3 quando é regular mais T_1 . Como quase sempre se trabalha com espaços T_2 , esta distinção não traz grandes problemas.

RESUMO

$$T_2 \implies T_1 \implies T_0$$

$$T_5 \implies T_4$$

$$T_4 + T_1 \implies T_3 + T_1 \implies T_2 + T_1$$

$\text{completamente normal} \implies \text{normal} \implies \text{regular} \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0$

Exercícios

Exercício. Procure exemplos de espaços (com pelo menos 2 pontos e topologia não caótica)

- que satisfazem T_3 mas não satisfazem T_1 nem T_2 (provando que T_3 sem T_1 não implica T_2);

- que satisfazem T_4 mas não satisfazem T_1 nem T_3 (provando que T_4 sem T_1 não implica T_3).

Dica: explore as topologias de um conjunto com 2 ou 3 pontos.



Mais contra-exemplos

- Existem exemplos de espaços T_2 que não são T_3 (espaço de Hausdorff não regular): veja exercícios B1.7 e B1.8;
- existem exemplos de espaços T_3 que não são T_4 (espaço regular não normal): veja exercícios B2.8 e B2.9;
- existem exemplos de espaços T_4 que não são T_5 (espaço normal mas não completamente normal).

Algumas caracterizações

- T_0 é equivalente a:
para quaisquer x, y distintos e $\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y$ sendo bases locais em x e y , respectivamente, $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$.
- T_1 é equivalente a:
 $\{x\}$ é fechado para todo $x \in X$.
- T_3 é equivalente a cada uma das seguintes:
 - para todos $x \in X$ e V viz. aberta de x existe A viz. aberta de x tal que $\overline{A} \subseteq V$;
 - para todo $x \in X$ existe um sistema fundamental de vizinhança FECHADAS de x .
- T_4 é equivalente a:
para todos $F \subseteq V$ (F fechado e V aberto) existe A aberto tal que $F \subseteq A \subseteq \overline{A} \subseteq V$.

Proposição B1.4. • *Subespaço de espaço Hausdorff é Hausdorff*

- *Produto de espaços Hausdorff é Hausdorff.*
- *Espaços métricos (com a top. induzida) são Hausdorff.*

<

Proposição B1.5. • *Subespaço de espaço T_3 é também T_3 .*

- *Produto de espaços T_3 é também T_3 .*
(Produto de espaços T_4 pode não ser T_4 : veja exercício B2.8.)
- *Subespaço FECHADO de espaço T_4 é também T_4 .*
- *Subespaço de espaço T_5 é T_4 .¹*

<

Teorema B1.6. *Todo esp. métrico é normal.*

<

¹Na verdade vale a recíproca: um espaço tal que todo seu subespaço é T_4 satisfaz T_5 . Esta é então uma definição equivalente para espaço T_5 .

Exercícios

Exercício. Adaptando a prova do Teorema B1.6, mostre que $\mathbb{R}_S$ (reta de Sorgenfrey) é normal. ★

2

Exercício B1.7 (Reta esburacada 1). Considere $\mathbb{R}$ com a topologia gerada pelos conjuntos da forma (a, b) ou da forma $(a, b) \setminus K$ onde $a < b \in \mathbb{R}$ e $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

- (a) Mostre que isso é uma base.
- (b) Mostre que tal espaço é de Hausdorff.
- (c) Mostre que K é fechado.
- (d) Mostre que tal espaço não é regular: $p = 0$ não pode ser separado de K . ★

Exercício B1.8 (Reta esburacada 2). Considere $\mathbb{R}$ com a topologia gerada pelos conjuntos da forma $(a, b) \setminus C$ onde $a < b \in \mathbb{R}$ e $C \subset \mathbb{R}$ é enumerável. Vamos chamar tal espaço de **reta esburacada**.

- (a) Mostre que isso é uma base.
- (b) Mostre que tal espaço é de Hausdorff.
- (c) Mostre que todo subconjunto enumerável é fechado.
- (d) Mostre que tal espaço não é regular. ★

B2 Propriedades de enumerabilidade

LEMBRETE:^[Fol99, pag. 6]

- $\text{card}(X) \leq$ (resp. $=$ // resp. $\geq$) $\text{card}(Y)$ significa que existe $f : X \rightarrow Y$ injetora (resp bijetora // , resp. sobrej.)
 - não é nada obvio e ate precisa do AxEsc mas se existem sob e inj entao existe bij**
 - X enumerável significa $\text{card}(X) \leq \text{card}(\mathbb{N})$,
 - um produto cartesiano finito de enumeráveis é enumerável
 - uma reunião enumerável de enumeráveis é enumerável
 - $\text{card}X < \text{card}P(X)$.
- Em particular, $\text{card}(\mathbb{N}) < \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \text{card}(\mathbb{R})$.

Definição B2.1. Dizemos que um conjunto C é denso no espaço topológico (X, τ) se $\overline{C} = X$. ★

A condição é equivalente a pedir que $C \cap A \neq \emptyset$ para todo A aberto não vazio, ou mesmo apenas para todo A em uma base.

Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é dito:

- **espaço 1^0 –contável^a**: se para todo $x \in X$ existe um sistema fundamental de vizinhanças de x ENUMERÁVEL;
- **espaço 2^0 –contável**: se admite uma base ENUMERÁVEL;
- **espaço 3^0 –contável** ou **separável**: se existe um subconjunto denso enumerável.^b

^aEm inglês é usado o termo **first countable**, equivalentemente dizemos que satisfaz o **Primeiro axioma de enumerabilidade**. Analogamente para as propriedades seguintes.

^bA definição de 3^0 –contável é pouco usada: usaremos mais o termo separável.

Propriedades simples

$$2^0c \implies 1^0c$$

$$2^0c \implies 3^0c$$

Exemplo B2.2.

- $\mathbb{R}$ com a topologia usual satisfaz os três axiomas;
- $\mathbb{R}$ com a topologia de Sorgenfrey é apenas (1^0c) e (3^0c) ;
- $\mathbb{R}$ com a topologia co-finita satisfaz apenas o 3º axioma;
 $\mathbb{R}$ com a topologia co-contável não satisfaz nenhum dos três axiomas.
- $\mathbb{R}$ com a topologia discreta satisfaz apenas o 1º axioma. ★

Exercícios

Exercício. Verifique as afirmações do exemplo acima. ★

Proposição B2.3.

- *Produto (finito) de (i^0c) é (i^0c) para $i = 1, 2, 3$.*
- *Subespaço de (i^0c) é (i^0c) para $i = 1, 2$.
 (Subespaço de (3^0c) pode não ser (3^0c) : veja exercícios B2.9 e B2.8).* ◁

Proposição B2.4.

- *Espaços métricos são sempre (1^0c) .*
- *Espaços métricos separáveis são sempre (2^0c) .* ◁

Corolário B2.5 [A reta de Sorgenfrey não é metrizable]. Não existe uma métrica que induza a topologia de Sorgenfrey em $\mathbb{R}$. ◁

B2.1 Mais resultados

Teorema B2.6. *Todo esp. top. (2^0c) e regular é normal.* ^a ◁

^aCom prova parecida pode se provar também que todo esp. top. enumerável e regular é normal.

Lema B2.7 [de Jones]. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um e.t. separável e Y um subespaço discreto, não enumerável e fechado em X . Então X não é T_4 .* ◁

Exercícios

Exercício B2.8 (Plano de Sorgenfrey). Considere o produto $X = \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ com a topologia produto.

1. considere a base obtida fazendo os produtos dos elementos da base dada pelos intervalos $[a, b)$: qual é o fecho de um elemento da base?
2. Mostre que X é Hausdorff, 1^0c e separável;
3. Mostre que X é regular (T_3).
4. Mostre que o conjunto $Y = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ é fechado, que com a topologia de subespaço é discreto e logo não é separável.
5. Conclua que **X não é T_4 (produto de T_4 pode nao ser T_4 !!!)**
6. Conclua que **não é verdade que cada subespaço de um espaço separável (que não seja 2^0c) é separável.** ★

Exercício B2.9 (Plano de Niemytski). O exemplo deste exercício é chamado de plano de Niemytski. Considere o semiplano $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\}$ com a topologia gerada por:

- as bolas abertas de centro (x, y) e raio menor que y se $y > 0$ (obs: não intersectam o eixo $\{y = 0\}$),
 - os conjuntos $\{(x, 0)\} \cup B_y((x, y))$ com $y > 0$ (bolas abertas que tocam o eixo $\{y = 0\}$ apenas no ponto $(x, 0)$, adicionadas deste ponto).
1. Mostre que isso define uma topologia (qual é o fecho de um elemento da base?)
 2. Mostre que X é Hausdorff, 1^0c e separável;
 3. Mostre que X não é 2^0c ;
 4. Mostre que X é regular (T_3).

5. Mostre que o eixo $\{y = 0\}$ com a topologia de subespaço tem a topologia discreta e logo não é separável.
6. Conclua que X não é T_4 .
7. Conclua que X não é metrizable.
8. Conclua que não é verdade que cada subespaço de um espaço separável (que não seja 2^0c) é separável. ★

B2.2 Sequências

Seja (X, τ) um e.t. e x_n uma sequência a valores em X .

Definição B2.10. Dizemos que x_n **converge a** x “ $x_n \rightarrow x$ ” se para toda vizinhança de x existe n_0 tal que $x_n \in V$ para $n > n_0$. ★

Também dizemos que o limite de x_n é x : “ $\lim x_n = x$ ”.

Exercícios

Exercício. Considere a noção de $x_n \rightarrow x$ em $\mathbb{R}$ coma as três topologias: a usual, a de Sorgenfrey e a gerada pelas semirretas (a, ∞) : a quais conceitos do cálculo correspondem? ★

Exercício. Mostre que em $\mathbb{R}$ com as topologias co-contável, discreta ou da reta esburacada (ex B1.8), vale que $x_n \rightarrow x$ se e só se x_n é definitivamente igual a x .

Mostre que com a topologia co-finita $x_n = 1/n \rightarrow x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ★

Propriedades simples

- se X é T_2 o limite é único.
- se $x_n \rightarrow x$ então $x \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$

Proposição B2.11. Se X é (1^0c) vale que

existe uma seq em B que converge a $x \iff x \in \overline{B}$.

(Sem a hipótese de 1^0c ainda vale “ $\implies$ ”).

◁

Exercícios

Exercício ((EX2a-26)). Mostre que em $\mathbb{R}$ com as topologias co-contável ou da reta esburacada, $0 \in \overline{(0, 1)}$ mas não existe uma sequência em $(0, 1)$ que convirja a zero. Conclua que não possuem bases locais enumeráveis (não são 1^0c). ★

B2.3 Continuidade, sequências e densos

Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função.

Propriedades simples

- Se D é denso em X e f contínua então $f(D)$ é denso em $f(X)$.
- Se X é separável e f contínua então $f(X)$ é separável.
- Se f é contínua e $x_n \rightarrow x$ (seq. convergente em X) então $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Proposição B2.12.

- Se X é (1^0c) então f é contínua se e só se $f(x_n) \rightarrow f(x)$ sempre que $x_n \rightarrow x$.
- Se além do acima, Y é Hausdorff, então f é contínua se e só se $f(x_n)$ converge sempre que x_n converge.

Em particular ambas caracterizações valem em métricos.

◁

Exercícios

Exercício ((EX2b-26)).

- Considere uma sequência em $X = (\mathbb{R}, \tau_{cc})$ e uma função de domínio X não contínua. Mostre que mesmo assim $f(x_n) \rightarrow f(x)$ sempre que $x_n \rightarrow x$. (X não é 1^0c).
- Procure um exemplo de uma função $f : X \rightarrow Y$ com X 1^0c e Y não Hausdorff tal que $f(x_n)$ converge sempre que x_n converge mas f não é contínua (e em particular não é verdade que $f(x_n) \rightarrow f(x)$ sempre que $x_n \rightarrow x$.)



Exercícios

Exercício (Espaço da seq. convergente). Considere o conjunto $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ com a topologia gerada pela base $\{\{n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\{n > n_0\} \cup \{\infty\}\}$.

Mostre que $x : \mathbb{N} \rightarrow X : n \mapsto x_n$ é uma sequência que converge a L se e só se $\tilde{x} : \mathbb{N}_\infty \rightarrow X : n \mapsto \begin{cases} x_n & \text{se } n \in \mathbb{N} \\ L & \text{se } n = \infty \end{cases}$ é contínua. ★

B3 Homeomorfismos

Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função.

Definição B3.1. Dizemos que f é um **homeomorfismo** se é bijetora e tanto f quanto f^{-1} são contínuas.

Dizemos que $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ são **homeomorfos** se existe um homeomorfismo entre eles. ★

Definição B3.2. Uma propriedade de um esp. top. é dita **invariante topológico** se é preservada por homeomorfismos. ★

Propriedades

- Um homeomorfismo induz uma bijeção entre $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$;
- toda propriedade que envolve apenas abertos, fechados e pontos é um invariante topológico ($T_0...T_5$, $(1^0c...3^0c)$, convergência de sequências).

Proposição B3.3. Sejam X, Y totalmente ordenados com a top. da ordem e $f : X \rightarrow Y$ uma função bijetora que preserva a ordem (isomorfismo de ordem). Então f é homeomorfismo. ◁

Exemplo B3.4. A função $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ é estr. cresc. e as top. usuais coincidem com a da ordem, então é homeomorfismo.

Note que:

- troca seq. conv. com seq. conv.
- não troca seq. de Cauchy com seq. de Cauchy: "ser seq. de Cauchy" não é invariante topológico (depende da métrica)
- não manda limitados em limitados: "ser conjunto limitado" não é invariante topológico (depende da métrica). ★

Exercícios

Exercício. Seja $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

Mostre que, dotado da topologia induzida por $\mathbb{R}$, ele é homeomorfo ao espaço da sequência convergente, enquanto com a topologia discreta ele é homeomorfo a $\mathbb{N}$ (com a topologia discreta). ★

B4 Resumo de resultados sobre espaços métricos

- Espaços métricos (com a top. induzida pela métrica) são Hausdorff: Proposição [B1.4](#)
- Todo esp. métrico é normal: Teorema [B1.6](#).
- Espaços métricos são sempre $(1^0)c$
Espaços métricos separáveis são sempre (2^0c) : Proposição [B2.4](#)
- Em esp. métricos (por serem $(1^0)c$) valem as afirmações das Proposições [B2.11](#)e [B2.12](#) (caracterização de fecho e de continuidade por sequências).

Outros exercícios

Exercício. O gráfico de uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ com Y Hausdorff é fechado (na topologia produto de $X \times Y$). ★

Exercício. Seja (X, τ) um espaço topológico. Mostre que X é Hausdorff se e só se a diagonal $F = \{(x, x) : x \in X\}$ é um subconjunto fechado em $X \times X$ com a topologia produto. ★

Referências

- [Fol99] G. B. Folland. *Real analysis*. Second. Pure and Applied Mathematics (New York). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, pp. xvi+386. ISBN: 0-471-31716-0.
- [Mun00] J. R. Munkres. *Topology*. Second. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000, pp. xvi+537. ISBN: 0-13-181629-2.

Lista dos teoremas

B1.1	Proposição	B2
B1.2	Corolário	B2
B1.3	Definição	B2
B1.4	Proposição	B4
B1.5	Proposição	B4
B1.6	Teorema (Metr. é normal.)	B4
B1.7	Exercício (Reta esburacada 1)	B5
B1.8	Exercício (Reta esburacada 2)	B5
B2.1	Definição (Densos.)	B6
B2.2	Exemplo	B6
B2.3	Proposição	B7
B2.4	Proposição (Metr. e ax. de enumer.)	B7
B2.5	Corolário (A reta de Sorgenfrey não é metrizável)	B7
B2.6	Teorema (2c e reg. é normal.)	B8
B2.7	Lema (de Jones)	B8
B2.8	Exercício (Plano de Sorgenfrey)	B8
B2.9	Exercício (Plano de Niemytski)	B8
B2.10	Definição (converg. de seq.)	B10
B2.11	Proposição	B10
B2.12	Proposição	B11
B3.1	Definição (Homeomorfismo.)	B13
B3.2	Definição (Invariante topol.)	B13
B3.3	Proposição	B13
B3.4	Exemplo	B13

Lista dos exercícios

Exercício	B2
Exercício	B5
Exercício	B7
Exercício	B10
Exercício	B10
Exercício ((EX2a-26))	B10
Exercício ((EX2b-26))	B11
Exercício (Espaço da seq. convergente)	B11
Exercício	B13
Exercício	B15
Exercício	B15