

A1 Lembretes

Espaço métrico: dupla (E, d) : E conjunto, d **métrica**:

$d : E \times E \rightarrow [0, \infty)$ tal que

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in E$,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in E$.

Espaço vetorial normado: dupla $(E, \| \cdot \|)$: E espaço vetorial ¹,

$\| \cdot \|$ **norma**: uma função $\| \cdot \| : E \rightarrow [0, \infty)$ tal que

- $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in E$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in E$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$.
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$,

Podemos tomar em E a **métrica induzida** pela norma $d(x, y) := \|x - y\|$.

¹Conjunto E com uma soma interna (comutativa, associativa, com neutro e inverso) e um produto externo com coeficientes num corpo $\mathbb{K}$ (associativo, distributivo e com identidade):

- $x + y = y + x, \quad (x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in E$
- $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x), \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad \forall x \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad \forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$
- $1x = x, \quad \forall x \in E$.

Num espaço métrico (E, d) ,

- chamamos **bolas abertas** os conjuntos

$$B_\delta(x) = \{y \in E : d(x, y) < \delta\}, \quad (\text{A1.1})$$

- chamamos **abertos** os conjuntos $A \subseteq E$ tais que

$$\text{para todo } x \in A \text{ existe } r_x > 0 \text{ tal que } B_{r_x}(x) \subset A. \quad (\text{A1.2})$$

- em seguida definimos **fechados**, **fecho**, **interior**, ...
- usando distância também definimos a noção de **limites**, de **continuidade**, etc ...

Pergunta

Podemos definir conceitos análogos aos acima sem ter uma métrica?

A2 Espaços topológicos [Mun00, p.75]

Definição A2.1. **Espaço topológico:** dupla $(X, \mathcal{T})$: X conjunto, $\mathcal{T}$ **topologia:** uma família de subconjuntos de X , tal que

- $X, \emptyset \in \mathcal{T}$,
- se $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$ então $\bigcup A_i \in \mathcal{T}$ (reuniões quaisquer),
- se $\{A_i\}_{i=1, \dots, n} \subseteq \mathcal{T}$ então $\bigcap A_i \in \mathcal{T}$ (interseções finitas).^a

Os elementos de $\mathcal{T}$ são chamados “**abertos**”.



^aPodemos escrever esta propriedade considerando apenas interseções de dois elementos: o caso com n elementos segue por indução.

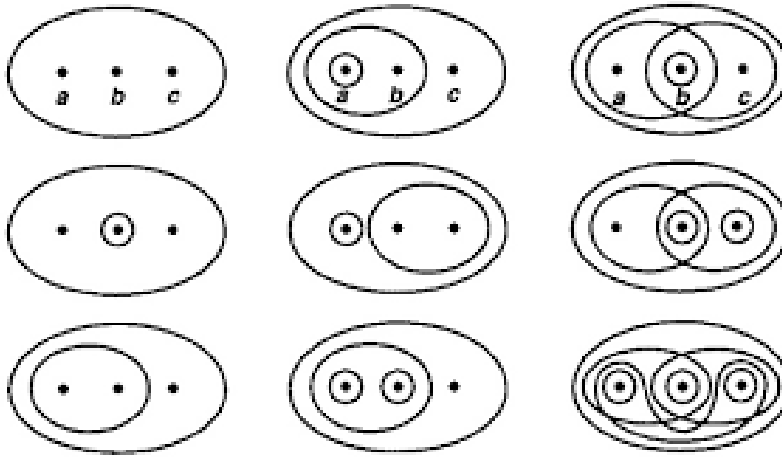
Exercícios

Exercício. Mostre que os abertos de um espaço métrico (como definidos em (A1.2)) formam uma topologia.



Exemplo A2.2.

- Para qualquer conjunto X podemos definir
 - a **Topologia caótica** (ou trivial): $\mathcal{T}_c = \{\emptyset, X\}$,
 - a **Topologia discreta**: $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$.
- Dado um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ e dado $Y \subseteq X$, podemos definir em Y a **topologia de subespaço**: $\mathcal{S} := \{A \cap Y : A \in \mathcal{T}\}$
- Para um conjunto com dois pontos $\{0, 1\}$, além da topologia caótica e da discreta, podemos considerar o chamado **Espaço de Sierpinski**, onde $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, X\}$.
- Em $\{a, b, c\}$, todas as seguintes são topologias:



Exercícios

- Exercício.** • Mostre que as definidas acima são realmente topologias.
- Considere $Y = (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ com a topologia de subespaço: existem abertos de Y que não são abertos de $\mathbb{R}$? existem abertos de $\mathbb{R}$ (contidos em Y) que não são abertos de Y ?



Exemplo A2.3 (topologias mais exóticas).

- a **Topologia co-finita**: $\mathcal{T}_{cf} = \{A \subseteq X : A^c \text{ é finito}\} \cup \{\emptyset\}$.
- a **Topologia co-contável**: $\mathcal{T}_{cc} = \{A \subseteq X : A^c \text{ é enumerável}\} \cup \{\emptyset\}$. ★

Exercícios

- Exercício.** • Mostre que as definidas acima são realmente topologias.
- Mostre que $\mathcal{T}_{cf}$ (resp. $\mathcal{T}_{cc}$) coincide com a topologia discreta quando X é finito (resp. quando X é enumerável).
 - Mostre que a família $F = \{A \subseteq X : A \text{ é infinito}\} \cup \{\emptyset\}$, sendo X conjunto infinito NÃO é uma topologia. ★

Definição A2.4. Dadas duas topologias $\mathcal{T}, \mathcal{S}$ em um conjunto X dizemos que

- $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$ são **comparáveis** se vale uma das seguintes:
 - $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$: $\mathcal{T}$ é **menos fina** (coarser) de $\mathcal{S}$ (estritamente se $\mathcal{T} \neq \mathcal{S}$),
 - $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{S}$: $\mathcal{T}$ é **mais fina** (finer) de $\mathcal{S}$ (estritamente se $\mathcal{T} \neq \mathcal{S}$). ★

A2.1 Bases e sub-bases

Definição A2.5. Dado um conjunto X , uma **base** (topológica) é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X tal que ^a

$$(B1) \quad X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B, \quad ^b$$

$$(B2) \quad \text{se } x \in B_1 \cap B_2 \text{ com } B_1, B_2 \in \mathcal{B} \text{ então existe } B_3 \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Chamamos **topologia gerada pela base** $\mathcal{B}$ a topologia

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} := \{U \subseteq X : \forall x \in U \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq U\}. \quad (A2.1)$$

★

^aEsta é a definição do [Mun00]. Em outros textos a definição é dada para um esp. topológico $(X, \mathcal{T})$ dado, como na hipótese da Proposição A2.7:

As definições são diferentes mas chegam ao mesmo resultado, em vista das proposições A2.7 e A2.6

^bIsso é equivalente a: para todo $x \in X$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.

Proposição A2.6. • $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ é realmente uma topologia.

$$\bullet \quad \mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{U = \bigcup_{i \in I} B_i : B_i \in \mathcal{B} \text{ (reuniões quaisquer)}\} \quad \triangleleft$$

Proposição A2.7. Dado um e.t. $(X, \mathcal{T})$, seja $\mathcal{D}$ uma coleção tal que

$$\bullet \quad \mathcal{D} \subseteq \mathcal{T},$$

• todo elemento de $\mathcal{T}$ pode ser escrito como reunião de elementos de $\mathcal{D}$,

então $\mathcal{D}$ é uma base e $\mathcal{T}_{\mathcal{D}} = \mathcal{T}$. △

IMPORTANTE

Esta construção é a que usamos para definir abertos em esp. métricos na página A2: as bolas da forma $B_\delta(x)$ formam uma base e a definição dos abertos coincide com a topologia gerada (compare (A1.2) com (A2.1)).

Esta topologia é dita **topologia induzida pela métrica**.

Em $\mathbb{R}^N$ chamamos **topologia usual** a induzida pela métrica da norma.

Definição A2.8. Dado um conjunto X , uma **sub-base** (topológica) é uma coleção $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X tal que suas interseções finitas formam uma base. ★

Uma definição alternativa para sub-base é dada pela seguinte caracterização:

Proposição A2.9. Uma coleção $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X é uma sub-base se e só se $X = \bigcup_{B \in \mathcal{S}} B$.

Em particular, toda base é uma sub-base. ◁

Comparação de topologias via bases

Lema A2.10. Em um conjunto X , sejam $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ duas bases e $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ as topologias correspondentes.

Então $\mathcal{T}'$ é mais fina de $\mathcal{T}$ se e só se vale o seguinte:

Para todos $x \in X$ e $B \in \mathcal{B}$ com $x \in B$, existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subseteq B$. ◁

Exercícios

Exercício (Outras topologias em $\mathbb{R}$). Em $\mathbb{R}$ considere as bases $\mathcal{B}_a = \{(a, b) : a < b\}$, $\mathcal{B}_\ell = \{[a, b) : a < b\}$, $\mathcal{B}_u = \{(a, b] : a < b\}$ e suas topologias induzidas $\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_\ell, \mathcal{T}_u$, respectivamente.

Mostre que

- $\mathcal{T}_a$ é a topologia usual,
- $\mathcal{T}_\ell$ e $\mathcal{T}_u$ são estrit. mais finas e não comparáveis entre elas (são chamadas **topologia de limite inferior** e **topologia de limite superior**, respectivamente).
($\mathbb{R}, \mathcal{T}_\ell$) é também chamada de **reta de Sorgenfrey** $\mathbb{R}_S$.
- Mostre que $\mathcal{B}_f = \{[a, b] : a < b\}$ é apenas uma sub-base e a topologia gerada por ela é $\mathcal{T}_d$. ★

Exercício ((EX1-26)-Interseção de topologias).

- Dado um conjunto X , mostre que a interseção de qualquer família de topologias para X é uma topologia, mas a reunião pode não ser.
- Mostre que a topologia gerada por uma base $\mathcal{B}$ é exatamente a interseção de todas as topologias que contêm $\mathcal{B}$. ★

Exemplo A2.11.

- Os intervalos (a, b) formam uma base para a topologia usual de $\mathbb{R}$;
- os intervalos (a, ∞) e $(-\infty, b)$ formam uma sub-base para a topologia usual de $\mathbb{R}$
- os intervalos (a, ∞) formam uma base $\mathcal{B}$, mas a topologia gerada é apenas $\emptyset \cup X \cup \mathcal{B}$;
- a família dos conjuntos $\{x\} : x \in X$ forma uma base para a topologia discreta;
- os intervalos $[a, b)$ formam uma base para a topologia da reta de Sorgenfrey;
- se $\mathcal{B}$ é uma base para $(X, \mathcal{T})$ então $\{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ é uma **base para o subespaço** Y com a top. de subespaço;
- **IMPORTANTE**
 - os intervalos (a, b) com $a, b \in \mathbb{Q}$ também formam uma base para a topologia usual de $\mathbb{R}$
 - os intervalos $[a, b)$ com $a, b \in \mathbb{Q}$ também formam uma base MAS a topologia gerada NÃO É $\mathcal{T}_\ell$ ★

Exercícios**Exercício.** Cheque as afirmações do exemplo acima**Resumo propriedades base**Seja $\mathcal{B}$ uma base e $\mathcal{T}$ a topologia gerada por $\mathcal{B}$:

- se $x \in A \in \mathcal{T}$ então $\exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq A$;
- $A \in \mathcal{T} \iff A$ é reunião de elementos de $\mathcal{B}$.

A3 Fechados, fecho, interior, ...

Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico.

Definição A3.1. Chamamos **fechados** os conjuntos cujo complementar é um aberto. ★

Vale

- $X, \emptyset$ são fechados,
- se $\{F_i\}_{i \in I}$ são fechados então $\bigcap F_i$ é fechado (interseções quaisquer),
- se $\{F_i\}_{i=1, \dots, n}$ são fechados então $\bigcup F_i$ é fechado (reuniões finitas).

Exemplo A3.2.

- Em $(X, \mathcal{T}_c)$ apenas $\emptyset$ e X são fechados (e abertos);
- em $(X, \mathcal{T}_d)$ todos os conjuntos são abertos e fechados;
- em $\mathbb{R}$ com a topologia usual, $[0, 1]$ é fechado, $(0, 1]$ e $[0, 1)$ não são abertos nem fechados;
- em $\mathbb{R}$ com a topologia de Sorgenfrey, $[0, 1)$ é fechado (e aberto), $(0, 1)$ é apenas aberto, $[0, 1]$ é apenas fechado, $(0, 1]$ não é aberto nem fechado;
- em $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{N}$) com a topologia co-finita todos os conjuntos finitos são fechados. O conjunto dos naturais pares não é aberto nem fechado;
- em $\mathbb{R}$ com a topologia co-contável todos os conjuntos enumeráveis são fechados. $[0, 1]$, $(0, 1)$ não são abertos nem fechados. ★

Exercícios

Exercício. Cheque as afirmações do exemplo acima ★

Definição A3.3. Dado $B \subseteq X$, definimos

- o **fecho de B** (interseção de todos os fechados contendo B):

$$\overline{B} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F, \quad \text{onde } \mathcal{F} = \{F \subseteq X : F \text{ é fechado e } B \subseteq F\}.$$

- o **interior de B** (reunião de todos os abertos contidos em B):

$$B^\circ = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V, \quad \text{onde } \mathcal{V} = \{V \subseteq X : V \text{ é aberto e } V \subseteq B\}.$$

- $x \in X$ é **ponto aderente a B** se para todo aberto V tal que $x \in V$ vale $V \cap B \neq \emptyset$.
- $x \in X$ é **ponto interior de B** se existe um aberto V tal que $x \in V \subseteq B$.
- $x \in X$ é **ponto de fronteira de B** se para todo aberto V tal que $x \in V$ vale $V \cap B \neq \emptyset$ e $V \cap B^c \neq \emptyset$.
- $x \in X$ é **ponto de acumulação de B** se $x \in \overline{B \setminus \{x\}}$. ★

Outras notações usadas são $\overline{B} = Cl(B)$ e $B^\circ = int(B)$.

Propriedades

- $(\overline{B})^c = (B^c)^\circ$ e $\overline{B^c} = (B^\circ)^c$.
- $\overline{B}$ é fechado e B° é aberto.
Em particular, $\overline{B} = B$ se e só se B é fechado e $B^\circ = B$ se e só se B é aberto.
- $B \subseteq H \implies B^\circ \subseteq H^\circ$ e $\overline{B} \subseteq \overline{H}$.
- $\overline{\overline{B}} = \overline{B}$ e $(B^\circ)^\circ = B^\circ$.
- $B^\circ = \{x \in X : x \text{ é ponto interior de } B\}$.
- $\overline{B} = \{x \in X : x \text{ é ponto aderente de } B\}$.
- $\partial B = \overline{B} \cap \overline{B^c} = \overline{B} \setminus B^\circ$; $B^\circ \cap \partial B = \emptyset$; $\overline{B} = B \cup \partial B$.
- ∂B é sempre fechada e é vazia se B é aberto e fechado.

Exercícios

Exercício. Prove as propriedades acima.



Exemplo A3.4.

- em $(X, \mathcal{T}_d)$ vale $\overline{A} = A = A^\circ$ para todo $A \subseteq X$;
- em $(X, \mathcal{T}_c)$ vale $\overline{A} = X$ e $A^\circ = \emptyset$ para todo $A \subseteq X$ (exceto $\emptyset, X$);;
- o que são o fecho, o interior e a fronteira de $(0, 1]$ com a topologia usual e com a topologia de Sorgenfrey? E de $[0, 1)$?
- em $\mathbb{N}$ com a topologia co-finita, calcule o interior e o fecho de $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ é par}\}$, $C = \mathbb{N} \setminus A$;
- em $\mathbb{R}$ com a topologia usual e também com a topologia de Sorgenfrey vale $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$;
- calcule o fecho de $[0, 1)$ em $\mathbb{R}$ com a topologia co-contável.



Exercícios

Exercício. Calcule o que é pedido no exemplo A3.4 e verifique as demais afirmações nele contidas.



Definição A3.5. Dado um e.t. $(X, \mathcal{T})$ e $x \in X$, chamamos

- **vizinhança de x** um conjunto V que contém um aberto que contém x , ou seja, tal que

$$\exists A \in \mathcal{T} : x \in A \subseteq V;$$

- **sistema fundamental de vizinhanças de x** uma coleção de viz de x tal que toda viz. aberta de x contém um elemento da coleção;
- **base local para x** , um sistema fundamental de vizinhanças **abertas** de x . ★

Exemplo A3.6. Em $\mathbb{R}$ com top. usual,

- $\{(x - 1/n, x + 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ forma base local para x ;
- $\{[x - 1/n, x + 1/n] : n \in \mathbb{N}\}$ forma um sistema fundamental de vizinhanças de x .

Em $(X, \mathcal{T}_d)$,

- $\{x\}$ é uma base local para x (com apenas um elemento!);
- $\{G \subseteq X : x \in G\}$ também é uma base local para x . ★

Algumas das definições anteriores podem ser reformuladas mais brevemente usando a noção de vizinhança:

- $x \in X$ é **ponto aderente a B** se para toda viz. V de x vale $V \cap B \neq \emptyset$.
- $x \in X$ é **ponto aderente a B** se todo elemento de um sistema fundamental de vizinhanças de x intersecta B ;
- $x \in X$ é **ponto interior de B** se existe uma viz. V de x contida em B .
- A é **aberto** se e só se é vizinhança de todos seus pontos.

¹Em alguns livros ([Mun00; Dug66]) a definição de vizinhança pede que seja ele mesmo um aberto. Aqui usaremos a definição **vizinhança aberta** para esta situação.

A4 Funções contínuas

Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função.

Definição A4.1. Dizemos que f é **contínua** se a pre-imagem de todo aberto B de Y é um aberto de X :

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{T}, \forall B \in \mathcal{S}. \quad (A4.1)$$

★

Aqui $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ enquanto $f(A) = \{f(x) \in Y : x \in A\}$

Exercício A4.2 (Exercícios de conjuntos). Mostre que

- para qualquer subconjunto B do Y vale $f^{-1}(B)^C = f^{-1}(B^C)$ (cuidado, não vale um análogo para f : $f(A)^C \neq f(A^C)$);
- para qualquer subconjunto B do Y vale $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$;
para qualquer subconjunto A do X vale $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$;

★

Proposição A4.3. As afirmações a seguir são equivalentes à definição de continuidade (A4.1):

- 1) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para qualquer $A \subseteq X$.
- 2) $f^{-1}(B)$ é fechado para todo $B \subseteq Y$ fechado.
- 3) Para todo $x \in X$, vale que f é **contínua em x** , ou seja, para toda vizinhança V de $f(x)$ existe uma vizinhança U de x tal que $f(U) \subseteq V$.

◁

Exercícios

Exercício.

- Mostre que em 3) podemos substituir "vizinhança" por "vizinhança aberta".
- Mostre que na definição A4.1 podemos substituir " $\forall B \in \mathcal{S}$ " com " $\forall B \in \mathcal{B}$ " onde $\mathcal{B}$ é uma base para $\mathcal{S}$ (ou até apenas uma sub-base).
- Mostre que em esp. métricos f cont. em x equivale à definição comum

por ε, δ .



Exercícios

Exercício. • Discuta a continuidade da função $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_2) : x \mapsto x$ (identidade) quando

- 1) $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ é a topologia usual
- 2) $\mathcal{T}_1$ é a topologia usual e $\mathcal{T}_2$ é a topologia discreta
- 3) $\mathcal{T}_2$ é a topologia usual e $\mathcal{T}_1$ é a topologia discreta

• Mostre que a função característica $\chi_A : X \mapsto \mathbb{R}$ de um conjunto A é contínua se e só se A é aberto e fechado.



Propriedades

- São contínuas
 - a função constante (entre quaisquer e.t.);
 - a função identidade $i : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}) : x \mapsto x$;
 - a função inclusão $i : (Y, \mathcal{S}) \rightarrow (X, \mathcal{T}) : y \mapsto y$ onde Y é subespaço de X ;
 - a função $f(x) = d(x_0, x)$ (num espaço métrico) é contínua.
- Composição de contínuas é contínua.
- Se $f : X \rightarrow Z$ é contínua e Y é subespaço de X então $f|_Y$ é contínua.
- Se $f : X \rightarrow Z$ é contínua e $f(X) \subseteq W \subseteq Z \subseteq Y$, então $\tilde{f} : X \rightarrow W$ e $\hat{f} : X \rightarrow Y$ são contínuas.
- Se $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ sendo A_i abertos e $f|_{A_i}$ são contínuas então f é contínua (reunião qualquer).
- se $X = \bigcup_{i=1}^n F_i$ sendo F_i fechados e $f|_{F_i}$ são contínuas então f é contínua (reunião finita).

Exercícios

Exercício. Prove as propriedades acima.



A5 Mais topologias importantes

A5.1 Topologia de subespaço

Definição A5.1. Dado um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ e dado $Y \subseteq X$, podemos definir em Y a **topologia de subespaço**: $\mathcal{S} := \{A \cap Y : A \in \mathcal{T}\}$. ★

Propriedades

- B é aberto em Y se e só se existe A aberto em X tal que $B = A \cap Y$;
- B é fechado em Y se e só se existe A fechado em X tal que $B = A \cap Y$;
- se Y é aberto em X e $B \subseteq Y$, então B é aberto em Y se e só se B é aberto em X ;
- se $\mathcal{B}$ é uma base para $(X, \mathcal{T})$ então $\{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ é uma **base para o subespaço** Y com a top. de subespaço;
- se Y é fechado em X e $B \subseteq Y$, então B é fechado em Y se e só se B é fechado em X .
- se X é métrico com a topologia induzida, então a topologia de subespaço em Y coincide com a topologia induzida em Y pela restrição da métrica (dica: confronte as bases das duas topologias).

Exercícios

Exercício. Prove as propriedades acima. ★

A5.2 Topologia produto

Definição A5.2. Dados $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ esp. top, a coleção

$$\mathcal{B} = \{A \times B : A \in \mathcal{T}, B \in \mathcal{S}\}$$

é uma base em $X \times Y$; chamamos **topologia produto** em $X \times Y$, a topologia gerada por $\mathcal{B}$. ★

Proposição A5.3. Se $\mathcal{T}$ é gerada pela base $\mathcal{A}$ e $\mathcal{S}$ é gerada pela base $\mathcal{B}$ então $\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ é uma *base para a topologia produto*. ◁

Definimos as **Funções projeção**:

$$\begin{cases} \pi_X : X \times Y \rightarrow X : (x, y) \mapsto x, \\ \pi_Y : X \times Y \rightarrow Y : (x, y) \mapsto y. \end{cases}$$

Proposição A5.4. Se $A \in \mathcal{T}$ então $A \times Y = \pi_X^{-1}(A)$ é um aberto (e análogo), além disso, $\{\pi_X^{-1}(A) : A \in \mathcal{T}\} \cup \{\pi_Y^{-1}(B) : B \in \mathcal{S}\}$ é uma *sub-base (não base) para a topologia produto*. ◁

Proposição A5.5. As *funções projeção são contínuas* (com a topologia produto).

Em particular, a topologia produto é a menos fina para a qual as funções projeção são contínuas. ◁

Exercícios

Exercício. Mostre que produto de abertos é aberto e produto de fechados é fechado. ★

Exercício. Mostre que o produto de $\mathbb{R}$ com a topologia usual com si mesmo coincide com $\mathbb{R}^2$ com a sua topologia usual. ★

Exercício. Considere $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$. Encontre alguns exemplos de abertos, de fechados, de abertos-fechados e de nem abertos nem fechados. ★

A5.3 Topologia da ordem

Definição A5.6. Seja X um conjunto totalmente ordenado. A coleção

$$\{x \in X : x < a\} \cup \{x \in X : x > a\} : a \in X,$$

forma uma sub-base e a topologia gerada é dita **topologia da ordem**. ★

- Em $\mathbb{R}$ é a topologia usual; em $\mathbb{Q}$ e em $[0, \infty)$ é a topologia de subespaço.
- Em $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ é a topologia discreta.
- **” $\mathbb{R}^2$ alfabético”**

Definimos em $\mathbb{R}^2$ a **ordem alfabética**³

$$(x, y) \leq (x', y') \iff \begin{cases} x < x', \\ \text{ou} \\ x = x' \text{ e } y \leq y'. \end{cases}$$

Podemos definir em $\mathbb{R}^2$ a topologia induzida por esta ordem.

Exercícios

Exercício. Considere o conjunto $Y = [0, 1) \cup \{2\}$. Mostre que $\{2\}$ não é um aberto para a topologia da ordem (mas é para a topologia de subespaço de $\mathbb{R}$). ★

Exercício. Considere o conjunto^a $Y = \{1, 2\} \times \mathbb{N}$ ordenado alfabeticamente. Mostre que $\{(2, 1)\}$ não é um aberto para a topologia da ordem (mas é para a topologia de subespaço de $\mathbb{R}^2$). ★

Exercício. Considere os conjuntos $X = \mathbb{R}^2$, com a top da ordem alfabética, $Y = [0, 1] \times [0, 1]$ com a topologia induzida pela de X e $Z = [0, 1] \times [0, 1]$ com a topologia induzida pela SUA ordem alfabética. Mostre que $\{.5\} \times (.5, 1]$ é aberto em Y mas não em Z . ★

^aAssumiremos sempre $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$: sem zero.

³Também chamada lexicográfica ou do dicionário.

A6 Outras definições

Definição A6.1. • Chamamos **ponto isolado** um $x \in X$ tal que $\{x\}$ é aberto;

- Chamamos **espaço discreto** um e.t. em que todos os pontos são isolados (ou seja, a topologia é a discreta);
- Chamamos **espaço zero-dimensional** um e.t. que possui uma base formada por conjuntos abertos-fechados.



Exemplo A6.2. • $\mathbb{Z}$ com a topologia induzida por $\mathbb{R}$ é discreto, com a topologia co-finita não é discreto;

- $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ com a topologia induzida por $\mathbb{R}$ é discreto, mas $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ não é (0 não é isolado).
- A reta de Sorgenfrey é zero-dimensional
- $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são zero-dimensionais com a topologia induzida por $\mathbb{R}$ (sugestão: para $\mathbb{Q}$ tome a base dos (a, b) com extremos irracionais);
- subespaços de zero-dimensionais são zero-dimensionais.



Referências

- [Dug66] J. Dugundji. *Topology*. Allyn e Bacon, Inc., Boston, MA, 1966, pp. xvi+447.
- [Mun00] J. R. Munkres. *Topology*. Second. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000, pp. xvi+537. ISBN: 0-13-181629-2.

Lista dos teoremas

A2.1	Definição (Espaço topológico)	A3
A2.2	Exemplo	A3
A2.3	Exemplo (topologias mais exóticas)	A4
A2.4	Definição	A4
A2.5	Definição (Base.)	A5
A2.6	Proposição	A5
A2.7	Proposição	A5
A2.8	Definição (Sub-base.)	A6
A2.9	Proposição	A6
A2.10	Lema	A6
A2.11	Exemplo	A7
A3.1	Definição (Fechados.)	A8
A3.2	Exemplo	A8
A3.3	Definição (Fecho, interior,...)	A9
A3.4	Exemplo	A10
A3.5	Definição (Vizinhanças.)	A11
A3.6	Exemplo	A11
A4.1	Definição (Continuidade.)	A12
A4.2	Exercício (Exercícios de conjuntos)	A12
A4.3	Proposição	A12
A5.1	Definição (Topologia de subespaço.)	A14
A5.2	Definição (Topologia produto.)	A15
A5.3	Proposição	A15
A5.4	Proposição	A15
A5.5	Proposição	A15
A5.6	Definição (Topologia da ordem.)	A16
A6.1	Definição (Isolado, discreto, zero-dim.)	A17
A6.2	Exemplo	A17

Lista dos exercícios

Exercício	A3
Exercício	A4
Exercício	A4
Exercício (Outras topologias em $\mathbb{R}$)	A6
Exercício ((EX1-26)-Interseção de topologias)	A6
Exercício	A7
Exercício	A8
Exercício	A10
Exercício	A10
Exercício	A12
Exercício	A13
Exercício	A13
Exercício	A14
Exercício	A15
Exercício	A15
Exercício	A15
Exercício	A16
Exercício	A16
Exercício	A16