A1 Lembretes

Espaço métrico: dupla (E, d): E conjunto, d **métrica**:
$d : E \times E \to [0, \infty)$ tal que

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall\, x, y \in E$,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall\, x, y, z \in E$.

Espaço vetorial normado: dupla $(E, \|\ \|)$: E espaço vetorial [1],
$\|\ \|$ **norma**: uma função $\|\cdot\| : E \to [0, \infty)$ tal que

- $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in E$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall\, x, y \in E$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in E$.
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

Podemos tomar em E a *métrica induzida* pela norma $d(x, y) := \|x - y\|$.

---

[1] Conjunto E com uma soma interna (comutativa, associativa, com neutro e inverso) e um produto externo com coeficientes num corpo $\mathbb{K}$ (associativo, distributivo e com identidade):

- $x + y = y + x, \quad (x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in E$
- $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x), \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad \forall x \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad \forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$
- $1x = x, \quad \forall x \in E$.

Num espaço métrico (E, d),

- chamamos **bolas abertas** os conjuntos

$$B_\delta(x) = \{y \in E : \ d(x, y) < \delta\}, \tag{A1.1}$$

- chamamos **abertos** os conjuntos $A \subseteq E$ tais que

$$\text{para todo } x \in A \text{ existe } r_x > 0 \text{ tal que } B_{r_x}(x) \subset A. \tag{A1.2}$$

- em seguida definimos **fechados**, **fecho**, **interior**, ...
- usando distância também definimos a noção de **limites**, de **continuidade**, etc ...

Pergunta

Podemos definir conceitos análogos aos acima sem ter uma métrica?

A2 Espaços topológicos [Mun00, p.75]

Definição A2.1. **Espaço topológico**: dupla $(X, \mathcal{T})$: X conjunto, $\mathcal{T}$ **topología**: uma família de subconjuntos de X, tal que

- $X, \emptyset \in \mathcal{T}$,
- se $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{T}$ então $\bigcup A_i \in \mathcal{T}$ (reuniões quaisquer),
- se $\{A_i\}_{i=1,..,n} \subseteq \mathcal{T}$ então $\bigcap A_i \in \mathcal{T}$ (interseções finitas). [a]

Os elementos de $\mathcal{T}$ são chamados "**abertos**". ★

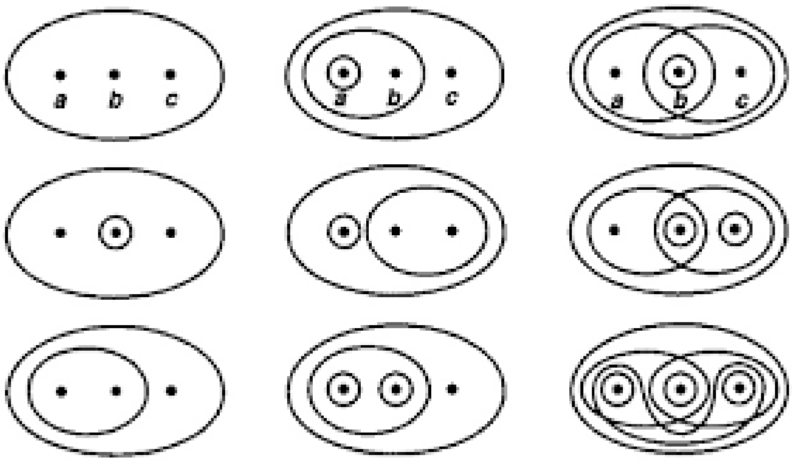
[a] Podemos escrever esta propriedade considerando apenas interseções de dois elementos: o caso com n elementos segue por indução.

Exercícios

Exercício. Mostre que os abertos de um espaço métrico (como definidos em (A1.2)) formam uma topologia. ★

Exemplo A2.2.

- Para qualquer conjunto X podemos definir
  - a **Topologia caótica** (ou trivial): $\mathcal{T}_c = \{\emptyset, X\}$,
  - a **Topologia discreta**: $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$.
- Dado um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ e dado $Y \subseteq X$, podemos definir em Y a **topologia de subespaço**: $\mathcal{S} := \{A \bigcap Y : \ A \in \mathcal{T}\}$
- Para um conjunto com dois pontos $\{0, 1\}$, além da topologia caótica e da discreta, podemos considerar o chamado **Espaço de Sierpinski**, onde $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, X\}$.
- Em $\{a, b, c\}$, todas as seguintes são topologias:



★

Exercícios

Exercício. • Mostre que as definidas acima são realmente topologias.

• Considere $Y = (0,1] \subseteq \mathbb{R}$ com a topologia de subespaço: existem abertos de Y que não são abertos de $\mathbb{R}$? existem abertos de $\mathbb{R}$ (contidos em Y) que não são abertos de Y? ★

Exemplo A2.3 (topologias mais exóticas).

- a **Topologia co-finita**: $\mathcal{T}_{cf} = \{A \subseteq X : \ A^c \text{ é finito}\} \bigcup \{\emptyset\}$.
- a **Topologia co-contável**: $\mathcal{T}_{cc} = \{A \subseteq X : \ A^c \text{ é enumerável}\} \bigcup \{\emptyset\}$. ★

Exercícios

Exercício. • Mostre que as definidas acima são realmente topologias.
• Mostre que $\mathcal{T}_{cf}$ (resp. $\mathcal{T}_{cc}$) coincide com a topologia discreta quando X é finito (resp. quando X é enumerável).
• Mostre que a família $F = \{A \subseteq X : \ A \text{ é infinito}\} \bigcup \{\emptyset\}$, sendo X conjunto infinito NÃO é uma topologia. ★

Definição A2.4. Dadas duas topologias $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ em um conjunto X dizemos que

- $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$ são **comparáveis** se vale uma das seguintes:
  - $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$: $\mathcal{T}$ é **menos fina** (coarser) de $\mathcal{S}$ (estritamente se $\mathcal{T} \neq \mathcal{S}$),
  - $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{S}$: $\mathcal{T}$ é **mais fina** (finer) de $\mathcal{S}$ (estritamente se $\mathcal{T} \neq \mathcal{S}$). ★

A2.1 Bases e sub-bases

Definição A2.5. Dado um conjunto X, uma **base** (topológica) é uma coleção $\mathscr{B}$ de subconjuntos de X tal que [a]

(B1) $X = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} B$, [b]

(B2) se $x \in B_1 \cap B_2$ com $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ então existe $B_3 \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Chamamos **topologia gerada pela base $\mathscr{B}$** a topologia

$$\mathcal{T}_{\mathscr{B}} := \{U \subseteq X : \ \forall x \in U \ \exists B \in \mathscr{B} : \ x \in B \subseteq U\}. \tag{A2.1}$$

★

[a] Esta é a definição do [Mun00]. Em outros textos a definição é dada para um esp. topológico $(X, \mathcal{T})$ dado, como na hipótese da Proposição A2.7:
As definições são diferentes mas chegam ao mesmo resultado, em vista das proposições A2.7 e A2.6

[b] Isso é equivalente a: para todo $x \in X$ existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B$.

Proposição A2.6.

- *$\mathcal{T}_{\mathscr{B}}$ é realmente uma topologia.*
- $\mathcal{T}_{\mathscr{B}} = \left\{U = \bigcup_{i\in I} B_i : \ B_i \in \mathscr{B}\ \textit{(reuniões quaisquer)}.\right\}$ ◁

Proposição A2.7. *Dado um e.t. $(X, \mathcal{T})$, seja $\mathscr{D}$ uma coleção tal que*

- $\mathscr{D} \subseteq \mathcal{T}$,
- *todo elemento de $\mathcal{T}$ pode ser escrito como reunião de elementos de $\mathscr{D}$,*

então $\mathscr{D}$ é uma base e $\mathcal{T}_{\mathscr{D}} = \mathcal{T}$. ◁

IMPORTANTE

Esta construção é a que usamos para definir abertos em esp. métricos na página A2: as bolas da forma $B_\delta(x)$ formam uma base e a definição dos abertos coincide com a topologia gerada (compare (A1.2) com (A2.1)).
Esta topologia é dita **topologia induzida pela métrica**.
Em $\mathbb{R}^N$ chamamos **topologia usual** a induzida pela métrica da norma.

Definição A2.8. Dado um conjunto X, uma **sub-base** (topológica) é uma coleção $\mathscr{S}$ de subconjuntos de X tal que suas interseções finitas formam uma base. ★

Uma definição alternativa para sub-base é dada pela seguinte caracterização:

Proposição A2.9. *Uma coleção $\mathscr{S}$ de subconjuntos de X é uma sub-base se e só se $X = \bigcup_{B \in \mathscr{S}} B$.*
Em particular, toda base é uma sub-base. ◁

Comparação de topologias via bases

Lema A2.10. *Em um conjunto X, sejam $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ duas bases e $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ as topologias correspondentes.*
Então $\mathcal{T}'$ é mais fina de $\mathcal{T}$ se e só se vale o seguinte:
Para todos $x \in X$ e $B \in \mathscr{B}$ com $x \in B$, existe $B' \in \mathscr{B}'$ tal que $x \in B' \subseteq B$. ◁

Exercícios

Exercício (Outras topologias em $\mathbb{R}$). Em $\mathbb{R}$ considere as bases
$\mathscr{B}_m = \{(a, b) :\ a < b\}$, $\mathscr{B}_S = \{[a, b) :\ a < b\}$, $\mathscr{B}_{up} = \{(a, b] :\ a < b\}$
e suas topologias induzidas $\mathcal{T}_m$, $\mathcal{T}_S$, $\mathcal{T}_{up}$, respectivamente.
Mostre que

- $\mathcal{T}_m$ é a topologia usual,
- $\mathcal{T}_S$ e $\mathcal{T}_{up}$ são estrit. mais finas e não comparáveis entre elas (são chamadas **topologia de limite inferior** e **topologia de limite superior**, respectivamente).
  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ é também chamada de **reta de Sorgenfrey** $\mathbb{R}_S$.
- Mostre que $\mathscr{B}_f = \{[a, b] :\ a < b\}$ é apenas uma sub-base e a topologia gerada por ela é $\mathcal{T}_d$. ★

Exercício ((EX1-26)-Interseção de topologias).
• Dado um conjunto X, mostre que a interseção de qualquer família de topologias para X é uma topologia, mas a reunião pode não ser.
• Mostre que a topologia gerada por uma base $\mathscr{B}$ é exatamente a interseção de todas as topologias que contêm $\mathscr{B}$. ★

Exemplo A2.11.

- Os intervalos (a, b) formam uma base para a topologia usual de $\mathbb{R}$;
- os intervalos (a, ∞) e $(-\infty, b)$ formam uma sub-base para a topologia usual de $\mathbb{R}$
- os intervalos (a, ∞) formam uma base $\mathscr{B}$, mas a topologia gerada é apenas $\emptyset \cup X \cup \mathscr{B}$;
- a família dos conjuntos $\{x\} : \ x \in X$ forma uma base para a topologia discreta;
- os intervalos $[a, b)$ formam uma base para a topologia da reta de Sorgenfrey;
- se $\mathscr{B}$ é uma base para $(X, \mathcal{T})$ então $\{B \cap Y : \ B \in \mathscr{B}\}$ é uma base para o subespaço Y com a top. de subespaço;
- IMPORTANTE
  - os intervalos (a, b) com $a, b \in \mathbb{Q}$ também formam uma base para a topologia usual de $\mathbb{R}$
  - os intervalos $[a, b)$ com $a, b \in \mathbb{Q}$ também formam uma base MAS a topologia gerada NÃO É $\mathcal{T}_\ell$ ★

Exercícios

Exercício. Cheque as afirmações do exemplo acima ★

Resumo propriedades base

Seja $\mathscr{B}$ uma base e $\mathcal{T}$ a topologia gerada por $\mathscr{B}$:

- se $x \in A \in \mathcal{T}$ então $\exists\, B \in \mathscr{B} : \ x \in B \subseteq A$;
- $A \in \mathcal{T} \iff A$ é reunião de elementos de $\mathscr{B}$.

A3 Fechados, fecho, interior, ...

Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico.

Definição A3.1. Chamamos **fechados** os conjuntos cujo complementar é um aberto. ★

Vale

- $X, \emptyset$ são fechados,
- se $\{F_i\}_{i \in I}$ são fechados então $\bigcap F_i$ é fechado (interseções quaisquer),
- se $\{F_i\}_{i=1,..,n}$ são fechados então $\bigcup Fi$ é fechado (reuniões finitas).

Exemplo A3.2.

- Em $(X, \mathcal{T}_c)$ apenas $\emptyset$ e X são fechados (e abertos);
- em $(X, \mathcal{T}_d)$ todos os conjuntos são abertos e fechados;
- em $\mathbb{R}$ com a topologia usual, $[0, 1]$ é fechado, $(0, 1]$ e $[0, 1)$ não são abertos nem fechados;
- em $\mathbb{R}$ com a topologia de Sorgenfrey, $[0, 1)$ é fechados (e aberto), $(0, 1)$ é apenas aberto, $[0, 1]$ é apenas fechado, $(0, 1]$ não é aberto nem fechado;
- em $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{N}$) com a topologia co-finita todos os conjuntos finitos são fechados. O conjunto dos naturais pares não é aberto nem fechado;
- em $\mathbb{R}$ com a topologia co-contável todos os conjuntos enumeráveis são fechados. $[0, 1]$, $(0, 1)$ não são abertos nem fechados. ★

Exercícios

Exercício. Cheque as afirmações do exemplo acima ★

Definição A3.3. Dado $B \subseteq X$, definimos

- o **fecho de** B (interseção de todos os fechados contendo B):
$$\overline{B} = \bigcap_{F \in \mathscr{F}} F\,, \quad \text{onde } \mathscr{F} = \{F \subseteq X : F \text{ é fechado e } B \subseteq F\}\,.$$
- o **interior de** B (reunião de todos os abertos contidos em B):
$$B^\circ = \bigcup_{V \in \mathscr{V}} V\,, \quad \text{onde } \mathscr{V} = \{V \subseteq X : V \text{ é aberto e } V \subseteq B\}\,.$$
- $x \in X$ é **ponto aderente a** B se para todo aberto V tal que $x \in V$ vale $V \cap B \neq \emptyset$.
- $x \in X$ é **ponto interior de** B se existe um aberto V tal que $x \in V \subseteq B$.
- $x \in X$ é **ponto de fronteira de** B se para todo aberto V tal que $x \in V$ vale $V \cap B \neq \emptyset$ e $V \cap B^c \neq \emptyset$.
- $x \in X$ é **ponto de acumulação de** B se $x \in \overline{B \setminus \{x\}}$. ★

Outras notações usadas são $\overline{B} = Cl(B)$ e $B^\circ = int(B)$.

Propriedades

a) $(\overline{B})^c = (B^c)^\circ$ e $\overline{B^c} = (B^\circ)^c$.

b) $\overline{B}$ é fechado e B° é aberto.
Em particular, $\overline{B} = B$ se e só se B é fechado e $B^\circ = B$ se e só se B é aberto.

c) $B \subseteq H \implies B^\circ \subseteq H^\circ$ e $\overline{B} \subseteq \overline{H}$.

d) $\overline{\overline{B}} = \overline{B}$ e $(B^\circ)^\circ = B^\circ$.

e) $B^\circ = \{x \in X : x \text{ é ponto interior de } B\}$.

f) $\overline{B} = \{x \in X : x \text{ é ponto aderente de } B\}$.

g) $\partial B = \overline{B} \cap \overline{B^c} = \overline{B} \setminus B^\circ$; $B^\circ \cap \partial B = \emptyset$; $\overline{B} = B \cup \partial B$.

h) ∂B é sempre fechada e é vazia se B é aberto e fechado.

Exercícios

Exercício. Prove as propriedades acima. ★

Exemplo A3.4.

- em $(X, \mathcal{T}_d)$ vale $\overline{A} = A = A^\circ$ para todo $A \in X$;
- em $(X, \mathcal{T}_c)$ vale $\overline{A} = X$ e $A^\circ = \emptyset$ para todo $A \subseteq X$ (exceto $\emptyset, X$);;
- o que são o fecho, o interior e a fronteira de $(0, 1]$ com a topologia usual e com a topologia de Sorgenfrey? E de $[0, 1)$?
- em $\mathbb{N}$ com a topologia co-finita, calcule o interior e o fecho de A=$\{1, 2, 3\}$, $B = \{p \in \mathbb{N} : \ p \text{ é par}\}$, $C = \mathbb{N} \setminus A$;
- em $\mathbb{R}$ com a topologia usual e também com a topologia de Sorgenfrey vale $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$;
- calcule o fecho de $[0, 1)$ em $\mathbb{R}$ com a topologia co-contável. ★

Exercícios

Exercício. Calcule o que é pedido no exemplo A3.4 e verifique as demais afirmações nele contidas. ★

Definição A3.5. Dado um e.t. $(X, \mathcal{T})$ e $x \in X$, chamamos

- **vizinhança de x** um conjunto V que contem um aberto que contém x, ou seja, tal que
$$\exists A \in \mathcal{T} : \; x \in A \subseteq V;$$
- **sistema fundamental de vizinhanças de x** uma coleção de viz de x tal que toda viz. aberta de x contém um elemento da coleção;
- **base local para x**, um sistema fundamental de vizinhanças **abertas** de x. ★

Exemplo A3.6. Em $\mathbb{R}$ com top. usual,

- $\{(x - 1/n, x + 1/n) : \; n \in \mathbb{N}\}$ forma base local para x;
- $\{[x-1/n, x+1/n] : \; n \in \mathbb{N}\}$ forma um sistema fundamental de vizinhanças de x.

Em $(X, \mathcal{T}_d)$,

- $\{x\}$ é uma base local para x (com apenas um elemento!):
- $\{G \subseteq X : \; x \in G\}$ também é uma base local para x. ★

Algumas das definições anteriores podem ser reformuladas mais brevemente usando a noção de vizinhança:

- $x \in X$ é ponto aderente a B se para toda viz. V de x vale $V \cap B \neq \emptyset$.
- $x \in X$ é ponto aderente a B se todo elemento de um sistema fundamental de vizinhanças de x intersecta B;
- $x \in X$ é ponto interior de B se existe uma viz. V de x contida em B.
- A é aberto se e só se é vizinhança de todos seus pontos.

[1]Em alguns livros ([Mun00; Dug66]) a definição de vizinhança pede que seja ele mesmo um aberto. Aqui usaremos a definição **vizinhança aberta** para esta situação.

A4 Funções contínuas

Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função.

Definição A4.1. Dizemos que **f é contínua** se a pre-imagem de todo aberto B de Y é um aberto de X:

$$\boxed{f^{-1}(B) \in \mathcal{T}, \forall B \in \mathcal{S}\,.} \quad [2] \tag{A4.1}$$

★

[2] Aqui $f^{-1}(B) = \{x \in X : \ f(x) \in B\}$ enquanto $f(A) = \{f(x) \in Y : \ x \in A\}$

Exercício A4.2 (Exercícios de conjuntos)**.** Mostre que

- para qualquer subconjunto B do Y vale $f^{-1}(B)^C = f^{-1}(B^C)$ (cuidado, não vale um análogo para f: $f(A)^C \neq f(A^C)$);
- para qualquer família de subconjuntos B_α do Y vale $f^{-1}(\bigcup B_\alpha) = \bigcup f^{-1}(B_\alpha)$ $f^{-1}(\bigcap B_\alpha) = \bigcap f^{-1}(B_\alpha)$;
- para qualquer subconjunto B do Y vale $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$;
  para qualquer subconjunto A do X vale $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$;

★

Proposição A4.3. *As afirmações a seguir são equivalentes à definição de continuidade* (A4.1)*:*

1) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ *para qualquer* $A \subseteq X$*.*

2) $f^{-1}(B)$ *é fechado para todo* $B \subseteq Y$ *fechado.*

3) Para todo $x \in X$*, vale que* ***f é contínua em x****, ou seja, para toda vizinhança* V *de* $f(x)$ *existe uma vizinhança* U *de* x *tal que* $f(U) \subseteq V$*.*

◁

Exercícios

Exercício.

• Mostre que em 3) podemos substituir "vizinhança" por "vizinhança aberta".

• Mostre que na definição A4.1 podemos substituir "$\forall B \in \mathcal{S}$" com

"$\forall\, B \in \mathscr{B}$"onde $\mathscr{B}$ é uma base para $\mathcal{S}$ (ou até apenas uma sub-base).
• Mostre que em esp. métricos f cont. em x equivale à definição comum por ε, δ. ★

Exercícios

Exercício. • Discuta a continuidade da função $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_2) : x \mapsto x$ (identidade) quando
1) $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ é a topologia usual
2) $\mathcal{T}_1$ é a topologia usual e $\mathcal{T}_2$ é a topologia discreta
3) $\mathcal{T}_2$ é a topologia usual e $\mathcal{T}_1$ é a topologia discreta
• Mostre que a função característica $\chi_A : X \mapsto \mathbb{R}$ de um conjunto A é contínua se e só se A é aberto e fechado. ★

Propriedades

- São contínuas
  - a função constante (entre quaisquer e.t.);
  - a função identidade $i : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}) : x \mapsto x$;
  - a função inclusão $i : (Y, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{T}) : y \mapsto y$ onde Y é subespaço de X;
  - a função $f(x) = d(x_0, x)$ (num espaço métrico) é contínua.
- Composição de contínuas é contínua.
- Se $f : X \to Z$ é contínua e Y é subespaço de X então $f|_Y$ é contínua.
- Se $f : X \to Z$ é contínua e $f(X) \subseteq W \subseteq Z \subseteq Y$, então $\widetilde{f} : X \to W$ e $\widehat{f} : X \to Y$ são contínuas.
- Se $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ sendo A_i abertos e $f|_{A_i}$ são contínuas então f é contínua (reunião qualquer).
- se $X = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ sendo F_i fechafos e $f|_{F_i}$ são contínuas então f é contínua (reunião finita).

Exercícios

Exercício. Prove as propriedades acima. ★

A5 Mais topologias importantes

A5.1 Topologia de subespaço

Definição A5.1. Dado um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ e dado $Y \subseteq X$, podemos definir em Y a **topologia de subespaço**: $\mathcal{S} := \{A \bigcap Y : \ A \in \mathcal{T}\}$. ★

Propriedades

- B é aberto em Y se e só se existe A aberto em X tal que $B = A \cap Y$;
- B é fechado em Y se e só se existe A fechado em X tal que $B = A \cap Y$;
- se Y é aberto em X e $B \subseteq Y$, então B é aberto em Y se e só se B é aberto em X;
- se $\mathscr{B}$ é uma base para $(X, \mathcal{T})$ então $\{B \cap Y : \ B \in \mathscr{B}\}$ é uma base para o subespaço Y com a top. de subespaço;
- se Y é fechado em X e $B \subseteq Y$, então B é fechado em Y se e só se B é fechado em X.
- se X é métrico com a topologia induzida, então a topologia de subespaço em Y coincide com a topologia induzida em Y pela restrição da métrica (dica: confronte as bases das duas topologias).

Exercícios

Exercício. Prove as propriedades acima. ★

A5.2 Topologia produto

Definição A5.2. Dados $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ esp. top, a coleção

$$\mathscr{B} = \{A \times B : \ A \in \mathcal{T}, B \in \mathcal{S}\}$$

é uma base em $X \times Y$; chamamos **topologia produto** em $X \times Y$, a topologia gerada por $\mathscr{B}$. ★

Proposição A5.3. *Se $\mathcal{T}$ é gerada pela base $\mathscr{A}$ e $\mathcal{S}$ é gerada pela base $\mathscr{B}$ então $\{A \times B : \ A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}$ é uma base para a topologia produto.* ◁

Definimos as **Funções projeção**:

$$\begin{cases} \pi_X : X \times Y \to X : (x, y) \mapsto x, \\ \pi_Y : X \times Y \to Y : (x, y) \mapsto y. \end{cases}$$

Proposição A5.4. *Se $A \in \mathcal{T}$ então $A \times Y = \pi_X^{-1}(A)$ é um aberto (e análogo), além disso, $\left\{\pi_X^{-1}(A) : \ A \in \mathcal{T}\right\} \cup \left\{\pi_Y^{-1}(B) : \ B \in \mathcal{S}\right\}$ é uma sub-base (não base) para a topologia produto.*

◁

Proposição A5.5. *As funções projeção são contínuas (com a topologia produto).*
Em particular, a topologia produto é a menos fina para a qual as funções projeção são contínuas. ◁

Exercícios

Exercício. Mostre que produto de abertos é aberto e produto de fechados é fechado. ★

Exercício. Mostre que o produto de $\mathbb{R}$ com a topologia usual com sí mesmo coincide com $\mathbb{R}^2$ com a sua topologia usual ★

Exercício. Considere $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$. Encontre alguns exemplos de abertos, de fechados, de abertos-fechados e de nem abertos nem fechados. ★

A5.3 Topologia da ordem

Definição A5.6. Seja X um conjunto totalmente ordenado. A coleção

$$\{x \in X : x < a\} \cup \{x \in X : x > a\} : a \in X,$$

forma uma sub-base e a topologia gerada é dita **topologia da ordem**. ★

- Em $\mathbb{R}$ é a topolgia usual; em $\mathbb{Q}$ e em $[0, \infty)$ é a topologia de subespaço.
- Em $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ é a topologia discreta.
- **"$\mathbb{R}^2$ alfabético"**

  Definimos em $\mathbb{R}^2$ a ordem alfabética[3]

$$(x, y) \leq (x', y') \iff \begin{cases} x < x', \\ ou \\ x = x' \ e \ y \leq y'. \end{cases}$$

  Podemos definir em $\mathbb{R}^2$ a topologia induzida por esta ordem.

Exercícios

Exercício. Considere o conjunto $Y = [0, 1) \cup \{2\}$. Mostre que $\{2\}$ não é um aberto para a topologia da ordem (mas é para a topologia de subespaço de $\mathbb{R}$). ★

Exercício. Considere o conjunto[a] $Y = \{1, 2\} \times \mathbb{N}$ ordenado alfabeticamente. Mostre que $\{(2, 1)\}$ não é um aberto para a topologia da ordem (mas é para a topologia de subespaço de $\mathbb{R}^2$). ★

Exercício. Considere os conjuntos $X = \mathbb{R}^2$, com a top da ordem alfabética, $Y = [0, 1] \times [0, 1]$ com a topologia induzida pela de X e $Z = [0, 1] \times [0, 1]$ com a topologia induzida pela SUA ordem alfabética. Mostre que $\{.5\} \times (.5, 1]$ é aberto em Y mas não em Z. ★

[a] Assumiremos sempre $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$: sem zero.

[3] Também chamada lexicográfica ou do dicionário.

A6 Outras definições

Definição A6.1.

- Chamamos **ponto isolado** um $x \in X$ tal que $\{x\}$ é aberto;
- Chamamos **espaço discreto** um e.t. em que todos os pontos são isolados (ou seja, a topologia é a discreta);
- Chamamos **espaço zero-dimensional** um e.t. que possui uma base formada por conjuntos abertos-fechados.

★

Exemplo A6.2.

- $\mathbb{Z}$ com a topologia induzida por $\mathbb{R}$ é discreto, com a topologia co-finita não é discreto;
- $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ com a topologia induzida por $\mathbb{R}$ é discreto, mas $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ não é (0 não é isolado).
- A reta de Sorgenfrey é zero-dimensional
- $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são zero-dimensionais com a topologia induzida por $\mathbb{R}$ (sugestão: para $\mathbb{Q}$ tome a base dos (a, b) com extremos irracionais);
- subespaços de zero-dimensionais são zero-dimensionais.

★

B1 Propriedades de separação

Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é dito:

- **espaço T_0**: se $\forall\, x, y \in X$ distintos existe uma viz aberta de x que não contém y, ou viceversa

$$\boxed{\forall\, x, y \in X \text{ distintos, } \exists A \in \mathcal{T} \text{ tal que } \begin{cases} x \in A, & y \notin A \\ \textit{ou} \\ x \notin A, & y \in A \end{cases};}$$

- **espaço T_1**: se $\forall\, x, y \in X$ distintos existe uma viz aberta de x que não contém y

$$\boxed{\forall\, x, y \in X \text{ distintos, } \exists A \in \mathcal{T} \text{ tal que } x \in A,\ \ y \notin A;}$$

- **espaço T_2**: se $\forall\, x, y \in X$ distintos existem uma viz. aberta de x e uma viz aberta de y que sejam disjuntas

$$\boxed{\forall\, x, y \in X \text{ distintos, } \exists A, B \in \mathcal{T} \text{ tais que } x \in A,\ \ y \in B \text{ e } A \cap B = \emptyset;}$$

- **espaço T_3**: se para todo F fechado e $x \notin F$, existem abertos disjuntos A, B tais que $F \subseteq A$ e $x \in B$;
- **espaço T_4**: se para todos F, G fechados disjuntos, existem abertos disjuntos A, B tais que $F \subseteq A$ e $G \subseteq B$;
- **espaço T_5**: se para todos F, G separados (ou seja, $\overline{F} \cap G = \emptyset = \overline{G} \cap F$) existem abertos disjuntos A, B tais que $F \subseteq A$ e $G \subseteq B$.

Propriedades simples

- Claramente $T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0$;
- não vale o viceversa: exemplo $\mathbb{N}$
  - com top caotica não é sequer T_0,

- com top $\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}..\{1,..,n\}, \mathbb{N}\}$ é apenas T_0 (não T_1),
- com top co-finita é apenas T_0, T_1 (não T_2),
- com top discreta é T_2;

- se os $\{x\}$ são fechados então $T_4 \implies T_3 \implies T_2$;
- $T_5 \implies T_4$.

Proposição B1.1. *$(X, \mathcal{T})$ é espaço T_1 se e só se $\{x\}$ é fechado para todo $x \in X$.* $\triangleleft$

Corolário B1.2. $\boxed{T_4 + T_1 \implies T_3 + T_1 \implies T_2 + T_1}$ $\triangleleft$

Definição B1.3.
- E.t. que satisfazem T_2 são ditos **espaços de Hausdorff**
- E.t. que satisfazem $T_3 + T_1$ são ditos **espaços regulares**
- E.t. que satisfazem $T_4 + T_1$ são ditos **espaços normais**
- E.t. que satisfazem $T_5 + T_1$ são ditos **espaços completamente normais** ★

As definições não são sempre assim... alguns textos chamam, por exemplo, regular o que chamamos T_3 e chamam T_3 quando é regular mais T_1. Como quase sempre se trabalha com espaços T_2, esta distinção não traz grandes problemas.

RESUMO

$T_2 \implies T_1 \implies T_0$
$T_5 \implies T_4$
$T_4 + T_1 \implies T_3 + T_1 \implies T_2 + T_1$

$\boxed{\text{completamente normal} \implies \text{normal} \implies \text{regular} \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0}$

Exercícios

Exercício. Procure exemplos de espaços (com pelo menos 2 pontos e topologia não caótica)

- que satisfazem T_3 mas não satisfazem T_1 nem T_2 (provando que T_3 sem T_1 não implica T_2);

- que satisfazem T_4 mas não satisfazem T_1 nem T_3 (provando que T_4 sem T_1 não implica T_3).

Dica: explore as topologias de um conjunto com 2 ou 3 pontos. ★

Mais contra-exemplos

- Existem exemplos de espaços T_2 que não são T_3 (espaço de Hausdorff não regular): veja execícios B1.8 e B1.9;
- existem exemplos de espaços T_3 que não são T_4 (espaço regular não normal): veja execícios B2.8 e B2.9;
- existem exemplos de espaços T_4 que não são T_5 (espaço normal mas naõ completamente normal).

Algumas caracterizações

Proposição B1.4.

- *T_0 é equivalente a:*
  para quaisquer x, y distintos e $\mathscr{B}_x$, $\mathscr{B}_y$ sendo bases locais em x e y, respectivamente, $\mathscr{B}_x \neq \mathscr{B}_y$.
- *T_1 é equivalente a:*
  $\{x\}$ é fechado para todo $x \in X$.
- *T_3 é equivalente a cada uma das seguintes:*
  - *para todos $x \in X$ e V viz. aberta de x existe A viz. aberta de x tal que $\overline{A} \subseteq V$;*
  - *para todo $x \in X$ existe um sistema fundamental de vizinhança FECHADAS de x.*
- *T_4 é equivalente a:*
  para todos $F \subseteq V$ (F fechado e V aberto) existe A aberto tal que $F \subseteq A \subseteq \overline{A} \subseteq V$. ◁

Proposição B1.5.

- *Subespaço de espaço Hausdorff é Hausdorff*
- *Produto de espaços Hausdorff é Hausdorff.*
- *Espaços métricos (com a top. induzida) são Hausdorff.*

◁

Proposição B1.6.

- *Subespaço de espaço T_3 é também T_3.*
- *Produto de espaços T_3 é também T_3.*
  (Produto de espaços T_4 pode não ser T_4: veja exercício B2.8.)
- *Subespaço FECHADO de espaço T_4 é também T_4.*
- *Subespaço de espaço T_5 é T_4.* [4]

◁

Teorema B1.7. *Todo esp. métrico é normal.* ◁

[4] Na verdade vale a reciproca: um espaço tal que todo seu subespaço é T_4 satisfaz T_5. Esta é então uma definição equivalente para espaço T_5.

Exercícios

Exercício. Adaptando a prova do Teorema B1.7, mostre que $\mathbb{R}_S$ (reta de Sorgenfrey) é normal. ★

2

Exercício B1.8 (Reta esburacada 1)**.** Considere $\mathbb{R}$ com a topologia gerada pelos conjuntos da forma (a, b) ou da forma $(a, b) \setminus K$ onde $a < b \in \mathbb{R}$ e $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Mostre que isso é uma base.

(b) Mostre que tal espaço é de Hausdorff.

(c) Mostre que K é fechado.

(d) Mostre que tal espaço não é regular: $p = 0$ não pode ser separado de K. ★

Exercício B1.9 (Reta esburacada 2)**.** Considere $\mathbb{R}$ com a topologia gerada pelos conjuntos da forma $(a, b) \setminus C$ onde $a < b \in \mathbb{R}$ e $C \subset \mathbb{R}$ é enumerável. Vamos chamar tal espaço de **reta esburacada**.

(a) Mostre que isso é uma base.

(b) Mostre que tal espaço é de Hausdorff.

(c) Mostre que todo subconjunto enumerável é fechado.

(d) Mostre que tal espaço não é regular. ★

B2 Propriedades de enumerabilidade

LEMBRETE:[Fol99, pag. 6]
– $card(X)$ $\leq$ ($resp. =$ // $resp. \geq$) $card(Y)$ significa que existe $f : X \to Y$ injetora (resp bijetora // , resp. sobrej.)
não é nada obvio e ate precida doAxEsc mas se existem sob e inj entao existe bij
– X enumerável significa $card(X) \leq card(\mathbb{N})$,
– um produto cartesiano finito de enumeráveis é enumerável
– uma reunião enumerável de enumerãveis é enumerável
– $cardX < cardP(X)$.
Em particular, $card(\mathbb{N}) < card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = card(\mathbb{R})$.
—

Definição B2.1. Dizemos que um conjunto C é denso no espaço topológico (X, τ) se $\overline{C} = X$. ★

A condição é equivalente a pedir que $C \cap A \neq \emptyset$ para todo A aberto não vazio, ou mesmo apenas para todo A em uma base.

Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é dito:

- **espaço 1^0−contável**[a]: se para todo $x \in X$ existe um sistema fundamental de vizinhanças de x ENUMERÁVEL;
- **espaço 2^0−contável**: se admite uma base ENUMERÁVEL;
- **espaço 3^0−contável** ou **separável**: se existe um subconjunto denso enumerável.[b]

[a] Em inglês é usado o termo **first countable**, equivalentemente dizemos que satisfaz o **Primeiro axioma de enumerabilidade**. Analogamente para as propriedades seguintes.
[b] A definição de 3^0−contável é pouco usada: usaremos mais o termo separável.

Propriedades simples

$2^0c \Longrightarrow 1^0c$
$2^0c \Longrightarrow 3^0c$

Exemplo B2.2.

- $\mathbb{R}$ com a topologia usual satisfaz os três axiomas;
- $\mathbb{R}$ com a topologia de Sorgenfrey é apenas (1^0c) e (3^0c);
- $\mathbb{R}$ com a topologia co-finita satisfaz apenas o 3^o axioma;
  $\mathbb{R}$ com a topologia co-contável não satisfaz nenhumdos três axiomas.
- $\mathbb{R}$ com a topologia discreta satisfaz apenas o 1^o axioma. ★

Exercícios

Exercício. Verifique as afirmações do exemplo acima. ★

Proposição B2.3.

- *Produto (finito) de* (i^0c) *é* (i^0c) *para* $i = 1, 2, 3$.
- *Subespaço de* (i^0c) *é* (i^0c) *para* $i = 1, 2$.
  (Subespaço de (3^0c) *pode não ser* (3^0c)*: veja exercícios B2.9 e B2.8).* $\triangleleft$

Proposição B2.4.

- *Espaços métricos são sempre* (1^0c).
- *Espaços métricos separáveis são sempre* (2^0c). $\triangleleft$

Corolário B2.5 [A reta de Sorgenfrey não é metrizável]. *Não existe uma métrica que induza a topologia de Sorgenfrey em* $\mathbb{R}$. $\triangleleft$

B2.1 Mais resultados

Teorema B2.6. *Todo esp. top. (2^0c) e regular é normal.* [a] ◁

[a] Com prova parecida pode se provar também que todo esp. top. enumerável e regular é normal.

Lema B2.7 [de Jones]. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um e.t. separável e Y um subespaço discreto, não enumerável e fechado em X. Então X não é T_4.* ◁

Exercícios

Exercício B2.8 (Plano de Sorgenfrey)**.** Considere o produto $X = \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ com a topologia produto.

1. considere a base obtida fazendo os produtos dos elementos da base dada pelos intervalos $[a, b)$: qual é o fecho de um elemento da base?
2. Mostre que X é Hausdorff, 1^0c e separável;
3. Mostre que X é regular (T_3).
4. Mostre que o conjunto $Y = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ é fechado, que com a topologia de subespaço é discreto e logo não é separável.
5. Conclua que **X não é T_4** (**produto de T_4 pode nao ser T_4!!!**)
6. Conclua que **não é verdade que cada subespaço de um espaço separável (que não seja 2^0c) é separável**. ★

Exercício B2.9 (Plano de Niemytski)**.** O exemplo deste exercício é chamado de plano de Niemytski. Considere o semiplano $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq 0\}$ com a topologia gerada por:

- as bolas abertas de centro (x, y) e raio menor que y se $y > 0$ (obs: não intersectam o eixo $\{y = 0\}$),
- os conjuntos $\{(x, 0)\} \cup B_y((x, y))$ com $y > 0$ (bolas abertas que tocam o eixo $\{y = 0\}$ apenas no ponto $(x, 0)$, adicionadas deste ponto).

1. Mostre que isso define uma topologia (qual é o fecho de um elemento da base?)
2. Mostre que X é Hausdorff, 1^0c e separável;
3. Mostre que X não é 2^0c;
4. Mostre que X é regular (T_3).

5. Mostre que o eixo $\{y = 0\}$ com a topologia de subespaço tem a topologia discreta e logo não é separável.
6. Conclua que X não é T_4.
7. Conclua que X não é metrizável.
8. Conclua que não é verdade que cada subespaço de um espaço separável (que não seja 2^0c) é separável. ★

B2.2 Sequências

Seja (X, τ) um e.t. e x_n uma sequência a valores em em X.

Definição B2.10. Dizemos que x_n **converge a** x "$x_n \to x$" se para toda vizinhançã de x existe n_0 tal que $x_n \in V$ para $n > n_0$. ★

Também dizemos que o limite de x_n é x: "$\lim x_n = x$".

Exercícios

Exercício. Considere a noção de $x_n \to x$ em $\mathbb{R}$ coma as três topologias: a usual, a de Sorgenfrey e a gerada pelar semirretas (a, ∞): a quais conceitos do cálculo correspondem? ★

Exercício. Mostre que em $\mathbb{R}$ com as topologias co-contável, discreta ou da reta esburacada (ex B1.9), vale que $x_n \to x$ se e só se x_n é definitivamente igual a x.
Mostre que com a topologia co-finita $x_n = 1/n \to x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ★

Propriedades simples

- se X é T_2 o limite é único.
- se $x_n \to x$ então $x \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$

Proposição B2.11. *Se X é (1^0c) vale que*

$$\text{existe uma seq em } B \text{ que converge a } x \iff x \in \overline{B}.$$

(Sem a hipótese de 1^0c ainda vale "$\Longrightarrow$"). ◁

Exercícios

Exercício ((EX2a-26)). Mostre que em $\mathbb{R}$ com as topologias co-contável ou da reta esburacada, $0 \in \overline{(0,1)}$ mas não existe uma sequência em $(0,1)$ que convirja a zero. Conclua que não possuem bases locais enumeráveis (não são 1^0c). ★

B2.3 Continuidade, sequências e densos

Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função.

Propriedades simples

- Se D é denso em X e f contínua então $f(D)$ é denso em $f(X)$.
- Se X é separável e f contínua então $f(X)$ é separável.
- Se f é contínua e $x_n \to x$ (seq. convergente em X) então $f(x_n) \to f(x)$.

Proposição B2.12.

- *Se X é (1^0c) então f é contínua se e só se $f(x_n) \to f(x)$ sempre que $x_n \to x$.*
- *Se além do acima, Y é Hausdorff, então f é contínua se e só se $f(x_n)$ converge sempre que x_n converge.*

Em particular ambas caracterizações valem em métricos. $\triangleleft$

Exercícios

Exercício ((EX2b-26)).

- Considere uma sequência em $X = (\mathbb{R}, \tau_{cc})$ e uma função de domínio X não contínua. Mostre que mesmo assim $f(x_n) \to f(x)$ sempre que $x_n \to x$. (X não é 1^0c).
- Procure um exemplo de uma função $f : X \to Y$ com X 1^0c e Y não Hausdorff tal que $f(x_n)$ converge sempre que x_n converge mas f não é contínua (e em particular não é verdade que $f(x_n) \to f(x)$ sempre que $x_n \to x$.)

★

Exercícios

Exercício B2.13 (Espaço da seq. convergente). Considere o conjunto $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ com a topologia gerada pela base $\{\{n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\{n > n_0\} \cup \{\infty\}\}$.

Mostre que $x : \mathbb{N} \to X : n \mapsto x_n$ é uma sequencia que converge a L se e só se $\widetilde{x} : \mathbb{N}_\infty \to X : n \mapsto \begin{cases} x_n & se\ n \in \mathbb{N} \\ L & se\ n = \infty \end{cases}$ é contínua. ★

B3 Homeomorfismos e imersões

Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função.

Definição B3.1. Dizemos que **f é um homeomorfismo** se é bijetora e tanto f quanto f^{-1} são contínuas.
Dizemos que **$(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ são homeomorfos** se existe um homeomorfismo entre eles. ★

Definição B3.2. Uma propriedade de um esp. top. é dita **invariante topológico** se é preservada por homeomorfismos. ★

Definição B3.3. Dizemos que **f é uma imersão** se $\widetilde{f} : X \to f(X)$ é um homeomorfismo. ★

Propriedades

- Um homeomorfismo induz uma bijeção entre $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$;
- toda propriedade que envolve apenas abertos, fechados e pontos é um invariante topológico ($T_0 ... T_5$, $(1^0 c ... 3^0 c)$, convergência de sequências).

Proposição B3.4. *Sejam X, Y totalmente ordenados com a top. da ordem e $f : X \to Y$ uma função bijetora que preserva a ordem (isomorfismo de ordem). Então f é homeomorfismo.* ◁

Exemplo B3.5. A função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ é estr. cresc. e as top. usuais coincidem com a da ordem, então é homeomorfismo.

Note que:

- troca seq. conv. com seq. conv.
- não troca seq. de Cauchy com seq. de Cauchy: "ser seq. de Cauchy"não é invariante topológico (depende da métrica)
- não manda limitados em limitados: "ser conjunto limitado"não é invariante topológico (depende da métrica). ★

Exemplo B3.6.

- Considere $X = [0, 1)$ com a topologia usual e $S^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| = 1\}$ com a topologia de subespaço.
  A função $f : [0, 1) \to S^1 : t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ é uma bijeção contínua mas não é um homeomorfismo: $f([0, \varepsilon))$ não é aberto.

- $f : [0,1) \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ é uma injeção contínua mas não é uma imersão;
- $f : [0,1/2) \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ é uma imersão.

★

Exercícios

Exercício. Seja $X = \{1/n : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.
Mostre que, dotado da topologia induzida por $\mathbb{R}$, ele é homeomorfo ao espaço da sequência convergente, enquanto com a topologia discreta ele é homeomorfo a $\mathbb{N}$ (com a topologia discreta). ★

B4 Resumo de resultados sobre espaços métricos

- Espaços métricos (com a top. induzida pela métrica) são Hausdorff: Proposição B1.5
- Todo esp. métrico é normal: Teorema B1.7.
- Espaços métricos são sempre (1^0c)

  Espaços métricos separáveis são sempre (2^0c): Proposição B2.4
- Em esp. métricos (por serem (1^0c)) valem as afirmações das Proposições B2.11e B2.12 (caracterização de fecho e de continuidade por sequências).

Outros exercícios

Exercício. Mostre que o gráfico de uma função contínua $f : X \to Y$ com Y Hausdorff é fechado (na topologia produto de $X \times Y$). ★

Exercício. Seja (X, τ) um espaço topológico. Mostre que X é Hausdorff se e só se a diagonal $F = \{(x, x) : \ x \in X\}$ é um subconjunto fechado em $X \times X$ com a topologia produto. ★

C1 Extensão de funções contínuas

Definição C1.1. Sejam $(X, \mathcal{T})$ e (Y, σ) espaços topológicos e Z subespaço de X. Dada $f : Z \to Y$ contínua, chamamos **extensão contínua de f a X** uma função $\widetilde{f} : X \to Y$ contínua, tal que $f = \widetilde{f}|_Z$. ★

Proposição C1.2. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ e (Y, σ) espaços topológicos sendo Y Hausdorff e $f, g : X \to Y$ funções contínuas. Então $\{x \in X : \ f(x) = g(x)\}$ é fechado.*
Em particular, se $f = g$ em um conjunto D denso em X então $f = g$.

◁

Observação C1.3. Nas condições acima, uma função contínua conhecida em um denso está univocamente identificada.

Porém nem toda função definida em um denso pode ser estendida a uma função contínua. ★

Definição C1.4. Seja $(X, \mathcal{T})$ espaço topológico e $F, G \subseteq X$ fechados disjuntos. Dizemos que F, G podem ser separados por uma função contínua se existe $f : X \to [0, 1]$ contínua tal que $f(F) = \{0\}$ e $f(G) = \{1\}$. ★

Dois teoremas importantes.

Teorema C1.5 [Lema de Urysohn]. *Seja $(X, \mathcal{T})$ espaço topológico T_4 e sejam $F, G \subseteq X$ fechados disjuntos então eles podem ser separados por uma função contínua.*

◁

Teorema C1.6 [de Tietze]. *Seja $Y = [a, b]$, $Y = (a, b)$ ou $Y = \mathbb{R}$ com a topologia usual. Sejam $(X, \mathcal{T})$ espaço T_4, $F \subseteq X$ fechado e $f : F \to Y$ função contínua. Então existe uma extensão contínua de f a X.* ◁

Observação C1.7.

- Se X é T_1 e $F \neq X$ a extensão nunca é única;
- se F não for fechado pode não existir extensão;
- A propriedade do Lema de Urysohn caracteriza T_4: $f_{-1}([0, 1/2))$ e $f_{-1}((1/2, 1])$ são abertos disjuntos que separam F, G. Ou seja,

Dois fechados disjuntos podem ser separados por abertos se e só se podem ser separados por uma função contínua.

★

Lema C1.8. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Suponha que exista $(A_s)_{s\in\mathbb{Q}}$ família de abertos satisfazendo:*

1. $\overline{A_r} \subseteq A_s$ *para* $r < s$;
2. $\bigcup_{s\in\mathbb{Q}} A_s = X$;
3. $\bigcap_{s\in\mathbb{Q}} A_s = \emptyset$.

Então $f : X \to \mathbb{R} : x \mapsto \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \in A_r\}$ *é uma função contínua.* ◁

Algumas passagens:
- $x \in \overline{A_r}$ implica $f(x) \leq r$
- $x \in {A_r}^c$ implica $f(x) \geq r$
  viceversa
- $f(x) > r$ implica $x \notin \overline{A_r}$
- $f(x) < r$ implica $x \in A_r$

Lema C1.9. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ espaço T_4, $F \subseteq X$ fechado e $\phi : F \to [-L, L]$ contínua. Então existe $g : X \to [-L, L]$ contínua tal que* $\begin{cases} |\phi - g| \leq \frac{2}{3}L & \textit{em } F \\ |g| \leq \frac{1}{3}L & \textit{em } X \end{cases}$ $\lhd$

C1.1 Espaços completamente regulares ($T_{3\frac{1}{2}}$)

Pergunta

É também verdade que um fechado e um ponto podem ser separados por abertos se e só se podem ser separados por uma função contínua?

A resp é não: separar por funções é uma propriedade mais forte.

Definição C1.10. Dizemos que um espaço topológico é um **espaço $T_{3\frac{1}{2}}$**, se para todo F fechado e $x \notin F$, eles podem ser separados por uma função contínua.
Um espaço $T_{3\frac{1}{2}}$ que é também T_1 é dito **completamente regular**. ★

Proposição C1.11.

- $T_{3\frac{1}{2}} \implies T_3$
- *Normal* $\implies$ *completamente regular* $\implies$ *regular.*
- *subespaços e produtos de* $T_{3\frac{1}{2}}$ *são* $T_{3\frac{1}{2}}$. ◁

Porém,

- existem exemplos de espaços T_3 que não são $T_{3\frac{1}{2}}$ (espaço regular mas não completamente regular): veja esp. de Mysior: [Aur22, Ex 3.2.17][a];
- existem exemplos de espaços $T_{3\frac{1}{2}}$ que não são T_4 (espaço completamente regular não normal): um caso é o plano de Sorgenfrey.

[a] Veja também em
https://dantopology.wordpress.com/2012/09/01/regular-but-not-completely-regular/

Exercícios

Exercício.
- Seja S o espaço de Sierpinsky (com dois pontos). Mostre que toda função $f : S \to \mathbb{R}$ contínua é constante.
- Seja $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ com a topologia gerada pela sub-base $\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{5, 6, 7\}$. Mostre que toda função $f : X \to \mathbb{R}$

contínua é constante.

Note que X não é T_4, porém os fechados $\{1,2\}$ e $\{6,7\}$ podem ser separados por abertos mas não por uma função contínua.

- Considere $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2\}$ e a sub-base formada pelos "V_x" da forma $\{(x,y) : y \in [0,2]\} \cup \{(x+t,t) : t \in [0,2]\}$. Mostre que toda função $f : S \to \mathbb{R}$ contínua é constante.

  Note que S não é T_2.

- Seja $T = S \cup \{\infty\}$ e adicione à sub-base os conjuntos $U_n : \{(x,y) : x \geq n\} \cup \{\infty\}$. Mostre que toda função $f : T \to \mathbb{R}$ contínua é constante.

- Note que S torna-se T_2 se aumentarmos a sub-base tomando todos os $V_x \setminus C$ com C finito.

  Ainda é verdade que toda função $f : S \to \mathbb{R}$ contínua é constante? (a resposta é não, mas agora veja o que acontece no [Aur22, Ex 3.2.17]!!)

  Mostre que S é zero-dimensional e que isso implica que é $T_{3\frac{1}{2}}$ (completamente regular).

★

Exercício (Espaço de Mysior)**.** Considere T como no exercicio anterior com a sub-base dos $V_x \setminus C$ junto com os U_n.

- Mostre que é Haudorff.
- Mostre que é regular (encontre bases locais de fechados).
- Mostre que se f é contínua e $f = 0$ em infinitos pontos em $[n, n+1] \times \{0\}$ então $f = 0$ em infinitos pontos em $[n+1, n+2] \times \{0\}$.
- Mostre que se f é contínua e $f = 0$ em infinitos pontos em $[0,1] \times \{0\}$ então $f(\infty) = 0$.
- Conclua que o fechado $[0,1] \times \{0\}$ e $\{\infty\}$ não podem ser separados por uma função contínua (mas podem por abertos): T é regular mas não completamente.

★

Exercícios

Exercício (Prova alternativa que métricos são normais)**.**

- Mostre que em X e.m. e com $A \subseteq X$ não vazio, a função $f(x) = d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ é contínua
- Dados F, G fechados disjuntos, mostre que $g(x) = \frac{d(x,G)}{d(x,G)+d(x,F)}$ é contínua e separa F e G, o que implica T_4.

★

C2 Topologias induzidas por funções

C2.1 Topologia fraca ou inicial

Seja $\mathscr{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha,\ \alpha \in \mathscr{A}\}$ uma família de funções onde $(Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ são e.t.

Queremos pôr uma topologia em X:

- que deixe todas estas funções contínuas.
- que seja a menor possível

Proposição C2.1. *A topologia $\mathcal{T}_I$ em X que cumpre o pedido acima é a gerada pela sub-base*

$$\mathscr{S} = \left\{f_\alpha^{-1}(A) :\ A \in \mathcal{T}_\alpha,\ \alpha \in \mathscr{A}\right\}.$$

Ela é também caracterizada pela propriedade que uma função $g : (Z, \mathcal{T}_Z) \to (X, \mathcal{T}_I)$ é contínua se e só se cada $f_\alpha \circ g : Z \to Y_\alpha$ é contínua.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "h=f_\alpha\circ g"'] & X \arrow[d, "f_\alpha"] \\ & Y_\alpha \end{tikzcd}$$

◁

Definição C2.2. A topologia $\mathcal{T}_I$ é dita **topologia fraca (ou inicial) induzida por $\mathscr{F}$ em X**; ★

Exemplo C2.3.

- A topologia de subespaço em $Y \subseteq X$ é a topologia fraca induzida pela inclusão $i : Y \to X$
- A topologia produto em $X \times Y$ é a topologia fraca induzida pelas dua projeções π_X e π_Y.
- Em an. funcional, a "topologia fraca" num espaço vetorial é a induzida pelos funcionais lineares que são contínuos na topologia induzida pela norma.

★

C2.2 Topologia forte ou final

Seja $\mathscr{F} = \{f_\alpha : X_\alpha \to Y,\ \alpha \in \mathscr{A}\}$ uma família de funções onde $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ são e.t.

Queremos pôr uma topologia em Y:

- que deixe todas estas funções contínuas.
- que seja a maior possível

Proposição C2.4. *A topologia $\mathcal{T}_F$ em Y que cumpre o pedido acima é a seguinte:*

$$\mathcal{T}_F = \{A \subseteq Y :\ f_\alpha^{-1}(A) \in \mathcal{T}_\alpha \text{ para todo } \alpha \in \mathscr{A}\}\,.$$

Ela é também caracterizada pela propriedade que uma função $g : (Y, \mathcal{T}_F) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ é contínua se e só se cada $g \circ f_\alpha : X_\alpha \to Z$ é contínua.

$$\begin{tikzcd}
X_\alpha \arrow[d, "f_\alpha"] \arrow[dr, "g\circ f_\alpha"] & \\
Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

$\lhd$

Definição C2.5. A topologia definida acima é dita **topologia forte (ou final) induzida por $\mathscr{F}$ em Y**; $\bigstar$

C3 Produtos de uma quantidade qualquer de espaços

Seja $\mathscr{P} = \{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha),\ \alpha \in \mathscr{A}\}$ uma família de e.t.

Definição C3.1. Sejam

- $\boxed{X = \prod_{\alpha \in \mathscr{A}} X_\alpha} := \{(x_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{A}} :\ x_\alpha \in X_\alpha\ \forall \alpha \in \mathscr{A}\}$,
- $\boxed{\pi_\beta} : X \to X_\beta : (x_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{A}} \mapsto x_\beta$ **funções projeção**,
- $\boxed{\mathcal{T} = \mathcal{T}_\times}$ a top. fraca induzida pelas funções projeção[a], ou seja gerada pela sub-base $\left\{\pi_\alpha^{-1}(A) :\ A \in \mathcal{T}_\alpha,\ \alpha \in \mathscr{A}\right\}$.

Chamamos o e.t $(X, \mathcal{T})$ de **produto dos espaços** $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha),\ \alpha \in \mathscr{A}$. ★

É então a menor topologia que deixa contínuas as funções projeção.

[a]Compare a definição com a proposição A5.4

Note que os el. da sub-base são

$$\begin{aligned}\pi_\alpha^{-1}(A) &= \{(x_\beta)_{\beta \in \mathscr{A}} : x_\alpha \in A\}\\ &= \prod_{\beta \in \mathscr{A}} U_\beta \qquad \text{onde } U_\beta = \begin{cases} A & se\ \beta = \alpha,\\ X_\beta & se\ \beta \neq \alpha,\end{cases}\end{aligned}$$

logo interseções finitas (os elementos da base) têm a forma

$$\begin{aligned}B &= \{(x_\beta)_{\beta \in \mathscr{A}} : x_\beta \in U_\beta \in \mathcal{T}_\beta : \forall\, \beta \in \mathscr{S}\}\\ &= \prod_{\beta \in \mathscr{A}} U_\beta \quad \text{onde} \begin{cases} U_\beta \in \mathcal{T}_\beta & \text{se } \beta \in \mathscr{S},\\ U_\beta = X_\beta & \text{se } \beta \notin \mathscr{S},\end{cases}\end{aligned}$$

onde $\mathscr{S}$ um subconjunto FINITO de $\mathscr{A}$, dito **suporte do aberto básico** B.

Observação C3.2. Quando os $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ são todos iguais podemos identificar o elemento $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ de $\prod_{\alpha\in\mathscr{A}} X$ com a função $f : \mathscr{A} \to X : \alpha \mapsto x_\alpha$.
Com esta representação um aberto da sub-base tem a forma

$$\{f : \mathscr{A} \to X : \ f(\hat{x}) \in A\}$$

para um $\hat{x} \in X$ e um $A \in \mathcal{T}$ dados.
Logo um aberto básico terá a forma

$$\{f : \mathscr{A} \to X : \ f(x_i) \in A_i : \ i = 1, ..., n\}$$

onde $x_1, .., x_n$ são n pontos em X e $A_1, .., A_n$ são n abertos em X.
Então $f_n \to f$ é equivalente à convergência pontual. ★

Topologia da caixa

Uma topologia diferente para o conjunto $X = \prod_{\alpha\in\mathscr{A}} X_\alpha$ é a **topologia da caixa**, gerada pela base $\{\prod_{\alpha\in\mathscr{A}} U_\alpha : \ U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha, \ \alpha \in \mathscr{A}\}$.

Observação C3.3. As duas topologias coincidem se $\mathscr{A}$ é finito, mas a da caixa é mais fina se é infinito. ★

Exercícios

Exercício. Compare os abertos de $\prod_{n\in\mathbb{N}}\{0; 1\}$ com os de $\square_{n\in\mathbb{N}}\{0; 1\}$. ★

Indicaremos por $\prod X_\alpha$ o produto com a topologia produto e por $\square X_\alpha$ o com a topologia da caixa.

Proposição C3.4. *Se cada $\mathcal{T}_\alpha$ é gerada por uma base $\mathscr{B}_\alpha$ então $\left\{\pi_\alpha^{-1}(A) : A \in \mathscr{B}_\alpha,\ \alpha \in \mathscr{A}\right\}$* **é também uma sub-base** *para a topologia produto e $\{\prod_{\alpha\in\mathscr{A}} U_\alpha : U_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha,\ \alpha \in \mathscr{A}\}$ é uma base para a topologia da caixa.* $\triangleleft$

Proposição C3.5. *Se $Y_\alpha \subseteq X_\alpha$, $\alpha \in \mathscr{A}$, então o espaço topológico $\prod_{\alpha\in\mathscr{A}} Y_\alpha$ é subespaço de $\prod_{\alpha\in\mathscr{A}} X_\alpha$.* $\triangleleft$

Proposição C3.6. *O fecho de um produto é o produto dos fechos:*

$$\prod \overline{G_\alpha} = \overline{\prod G_\alpha}\,.$$

Em particular, produto de fechados é fechado.

Produto de abertos é aberto se o produto é FINITO. $\triangleleft$

Exemplo C3.7. Considere $A = \prod_{n\in\mathbb{N}}(-1,1)$ em $\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R}$: observe que $x = (0)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ mas não é interior, logo A não é aberto.

Note que, ao contrário, $\square_{n\in\mathbb{N}}(-1,1)$ em $\square_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R}$ é aberto. ★

Proposição C3.8. *Produto de espaços T_i é T_i para $i = 0, ..., 3$.* $\triangleleft$

> **Observação C3.9.** Todas as afirmações até aqui valem inclusive tomando a topologia da caixa. ★

C3.1 Funções a valores em produtos

Seja $\mathscr{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha,\ \alpha \in \mathscr{A}\}$ uma família de funções onde $(Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ são e.t: podemos definir [a]

$$f : X \to \prod_{\alpha \in \mathscr{A}} Y_\alpha : x \mapsto (f_\alpha(x))_{\alpha \in \mathscr{A}} .$$

Viceversa, dada $f : X \to \prod_{\alpha \in \mathscr{A}} Y_\alpha$ podemos escrever f na forma acima tomando $f_\alpha := \pi_\alpha \circ f$.

[a] A função f é também dita função diagonal da família e denotada por $\Delta_{\alpha \in \mathscr{A}} f_\alpha$

Proposição C3.10. *Seja f como acima. Então f é contínua se e só se todas as $\pi_\alpha \circ f,\ \alpha \in \mathscr{A}$ são continuas.* $\triangleleft$

Corolário C3.11. *Seja $g : \prod_{\alpha \in \mathscr{A}} \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, e $\mathscr{F} = \{f_{\alpha \in \mathscr{A}} : X \to \mathbb{R},\ \alpha \in \mathscr{A}\}$ uma família de funções contínuas. Então $g((f_\alpha(x))_{\alpha \in \mathscr{A}}) = g \circ \Delta_{\alpha \in \mathscr{A}} f_\alpha$ é contínua.* $\triangleleft$

> **Observação C3.12.** Se no resultado acima usássemos a topologia da caixa, apenas seria verdade que se f é contínua então as f_α também são.
> Por exemplo, $f : \mathbb{R} \to \square_{\mathbb{N}} \mathbb{R} : t \mapsto (t)_{n \in \mathbb{N}}$ não é contínua (verifique). ★

Proposição C3.13. *Produto de espaços $T_{3\frac{1}{2}}$ é $T_{3\frac{1}{2}}$.* $\triangleleft$

Proposição C3.14. *Produto ENUMERÁVEL de espaços* (i^0c) *é* (i^0c) *para* $i = 1, 2, 3.$ $\triangleleft$

Lembrete enumerablidade:

- produto de finitos enumeráveis é enumerável;
- reuniáo enumerável de enumeráveis é enumerável;
- produto enumerável de enumeráveis em geral não é enumerável (por exemplo, sequências a valores em $\{0, 1\}$);
- as sequências a valores em enumerável, com finitos termos não nulos, são enumeráveis.

Generalizações e contraexemplos

- $\prod_{\alpha\in\mathbb{R}}\{0; 1\}$ não é (1^0c).
- Pode-se mostrar que se $card\mathscr{A} \leq card\mathbb{R}$ então $X = \prod_{\alpha\in\mathscr{A}} \mathbb{N}$ é separável, veja [Aur22, Ex 4.2.19].
- Pode-se mostrar que se $card\mathscr{A} \leq card\mathbb{R}$ e os X_α são separáveis então $\prod_{\alpha\in\mathscr{A}} X_\alpha$ é separável, veja [Aur22, Ex 4.2.20].
- Pode-se mostrar que se $card\mathscr{A} > card\mathbb{R}$ então $\prod_{\alpha\in\mathscr{A}}\{0, 1\}$ não é separável.

C3.2 Teor da imersão e uma caracterização de completamente regulares

Seja $\mathscr{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha,\ \alpha \in \mathscr{A}\}$ uma família de funções.

- dizemos que $\mathscr{F}$ **separa pontos** de X se para $x \neq y$ existe $\alpha \in \mathscr{A}$ tal que $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.
- dizemos que $\mathscr{F}$ **separa pontos de fechados** em X se para $x \notin F$ com F fechado existe $\alpha \in \mathscr{A}$ tal que $f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha(F)}$.

Teorema C3.15 [da imersão]. *Se as funções em $\mathscr{F}$ são contínuas então vale:*

- *Se $\mathscr{F}$ separa pontos então $\Delta_{\alpha\in\mathscr{A}} f_\alpha$ é injetora.*
- *Se $\mathscr{F}$ também separa pontos de fechados então $\Delta_{\alpha\in\mathscr{A}} f_\alpha$ é uma imersão.* ◁

Corolário C3.16. *Um e.t. é completamente regular se e só se é homeomorfo a um subespaço de $\prod_{\alpha\in\mathscr{A}}[0,1]$ para algum $\mathscr{A}$.* ◁

C4 Quociente

Seja $(X, \mathcal{T})$ um e.t. e $\sim$ uma relação de equivalência[5] em X.

Definição C4.1. Sejam

- $Q := X/_\sim$ o **conjunto das classes de equivalência**[a] de $\sim$ em X ;
- $\pi = \pi_\sim : X \to Q : x \mapsto [\![x]\!]$ a **mapa quociente**;
- $\mathcal{T}_Q$ (**topologia quociente**), a topologia final induzida pela mapa quociente, ou seja $\mathcal{T}_Q = \{V \subseteq Q : \ \pi^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$.

Chamamos **espaço quociente** o e.t. $(Q, \mathcal{T}_Q)$. ★

Vale então que a top. quociente em Q é a maior que deixa π contínua e é caracterizada pela propriedade que uma mapa $g : Q \to Z$ é contínua se e só se $g \circ \pi : X \to Z$ é contínua.

[a] Cada classe é um conjunto da forma $[\![x]\!] = \{y \in X : \ x \sim y\}$.

Observação C4.2. Pela definição acima, vale que π é sobrejetora e que $V \in \mathcal{T}_Q \iff \pi^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.
Note que $A \in \mathcal{T} \not\Rightarrow \pi(A) \in \mathcal{T}_Q$.
Porém se $A \in \mathcal{T}$ é tal que $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$ então $\pi(A) \in \mathcal{T}_Q$.
Conjuntos C tais que $C = \pi^{-1}(\pi(C))$ são ditos **saturados** (contêm todas as preimagens da sua imagem): individuar os saturados ajuda a enxergar os abertos do quociente. ★

Reciprocamente,

Proposição C4.3. *Dada $q : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ sobrejetora, se vale*

$$B \in \mathcal{S} \iff q^{-1}(B) \in \mathcal{T}$$

entao existe uma rel de eq. $\sim$ em X e um homeomorfismo $\phi : Y \to X/_\sim$ tal que $\pi_\sim = \phi \circ q$.

Em particular, a relação é $x \sim y \iff q(x) = q(y)$ e $\phi : y \to [\![x]\!] : \ q(x) = y$. ◁

[5] Uma relação reflexiva, simétrica e transitiva: $x \sim x \ \forall x$; $\quad x \sim y \iff y \sim x$; $\quad x \sim y, y \sim z \implies x \sim z$
[5] Em [Mun00] é chamada mapa quociente qualquer mapa sobrejetora com esta propriedade.

Observação C4.4. [Mun00] faz um pouco diferente:

- define mapa quociente qualquer mapa $q : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ sobrejetora e tal que $V \in \mathcal{S} \iff q^{-1}(V) \in \mathcal{T}$;
- define top. quociente como a topologia final induzida por uma mapa sobre (ou seja, que faz com que a mapa seja uma mapa quociente);
- o caso da rel. de eq. torna-se um caso particular do acima, mas a proposição C4.3 mostra que os dois pontos de vista são equivalentes.

★

Exercícios

Exercício. Seja $\sim$ a relação em $\mathbb{R}$ dada por $x \sim y \iff x = y = 0$ *ou* $xy > 0$. Descreva os abertos saturados de $\mathbb{R}$, o conjunto quociente $\mathbb{R}/_{\sim}$ e sua topologia. ★

Exercício. Seja $(X, \mathcal{T})$ um e.t e $\sim$ a relação $x \sim y \iff$ "$x \in A$ se e só se $y \in A$, $\forall A \in \mathcal{T}$"
Mostre que é uma relação de equivalência e que o esp. quociente é um e.t. T_0. ★

Exercício.

- Seja $X = [0,1]$ e $\simeq$ a relação que identifica 0 e 1 (ou seja, $x \sim y \iff x = y$ ou $x, y \in \{0,1\}$). Descreva os abertos saturados de X, o conjunto quociente $X/_{\sim}$ e sua topologia.
- Seja $f : [0,1] \to S^1$ (cada espaço com a topologia de subespaço de $\mathbb{R}$ e de $\mathbb{R}^2$, respectivamente) dada por $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.
  - Mostre que B é aberto em $S^1 \iff f^{-1}(B)$ é aberto em $[0,1]$ mas não é verdade que $f(A)$ é aberto em $S^1 \iff A$ é aberto em $[0,1]$.
  - Mostre que S^1 é homeomorfo a $X/_{\sim}$ (veja proposição C4.3).

★

Exercício.

- Seja $X = \overline{B}_1(0)$ em $\mathbb{R}^2$ e $\simeq$ a relação que identifica entre eles os pontos da borda. Descreva os abertos saturados de X, o conjunto quociente $X/_{\sim}$ e sua topologia.
- Seja $X = [0,1] \times [0,1]$ em $\mathbb{R}^2$ e $\simeq$ a relação que identifica $(t,0)$ com $(t,1)$ e $(0,t)$ com $(1,t)$, $t \in [0,1]$. Descreva os abertos saturados de X, o conjunto quociente $X/_{\sim}$ e sua topologia.

★

Exercício (Um espaço ventilador)**.** Considere $\mathbb{N} \times Y$ subespaço de $\mathbb{R}^2$ onde $Y = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, e a relação que identifica todos os pontos em $\mathbb{N} \times \{0\}$. Seja Q o espaço quociente.
Mostre que Q é enumerável mas não possui base local enumerável no ponto ω que é a classe de equivalência dos pontos em $\mathbb{N} \times \{0\}$ (logo não é metrizável). ★

C4.1 União disjunta

Seja $\mathscr{P} = \{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha),\ \alpha \in \mathscr{A}\}$ uma família de e.t.

Definição C4.5. Sejam

- $\boxed{X = \coprod_{\alpha\in\mathscr{A}} X_\alpha} := \{(\alpha, x_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}} :\ x_\alpha \in X_\alpha,\ \alpha \in \mathscr{A}\} = \bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}\{\alpha\} \times X_\alpha$,
- $\boxed{\mathcal{T}_{\amalg}}$ a top. gerada por todos os $\{\alpha\} \times A$ com $A \in \mathcal{T}_\alpha$.

Chamamos o e.t $(X, \mathcal{T}_{\amalg})$ de **união disjunta dos espaços** $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha),\ \alpha \in \mathscr{A}$. ★

Observação C4.6. Note que $\coprod_{\alpha\in\mathscr{A}} X$ coincide com $\mathscr{A} \times X$ tomando a topologia discreta em $\mathscr{A}$.

Note que $f_\alpha : X_\alpha \to \coprod_{\alpha\in\mathscr{A}} X_\alpha : x \mapsto (\alpha, x)$ é contínua. De fato, a topologia $\mathcal{T}_{\amalg}$ pode ser caracterizada como a topologia final induzida por estas mapas:

$$\mathcal{T}_{\amalg} = \left\{ A \subseteq \coprod_{\alpha\in\mathscr{A}} X_\alpha :\ f_\alpha^{-1}(A) \in \mathcal{T}_\alpha \text{ para todo } \alpha \in \mathscr{A} \right\}.$$

★

D1 Compactos

Definição D1.1. Uma família de conjuntos $\mathscr{R}$ é um **recobrimento** (ou cobertura) de X se $X = \bigcup_{A \in \mathscr{R}} A$.
Um e.t. $(X, \mathcal{T})$ é dito **compacto** se todo recobrimento aberto de X possui um subconjunto finito que ainda é um recobrimento de X (sub-cobertura). ★

Exemplo D1.2.

- Todo conjunto finito é compacto;
- todo conjunto é compacto com a topologia caótica;
- com a topologia discreta, um conjunto é compacto se e só se é finito;
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf})$ é compacto, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cc})$ não é compacto. ★

Exercícios

Exercício. Verifique as afirmações do exemplo acima. ★

Exercício. Mostre que ser compacto é um invariante topológico. ★

Exercício. Mostre que uma formulação equivalente para a definição de compacto é que "toda família de fechados $\mathscr{F}$ tal que $\bigcap_{F \in \mathscr{F}_n} F \neq \emptyset$ para qualquer $\mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{F}$ finito (propriedade da interseção finita) satisfaz $\bigcap_{F \in \mathscr{F}} F \neq \emptyset$". ★

Exercício. Mostre que se $\mathscr{B}$ é uma base para $(X, \mathcal{T})$ e toda cobertura feita por elementos de $\mathscr{B}$ possui uma sub-cobertura finita então X é compacto (ou seja, podemos testar apenas recobrimentos feitos por elementos de $\mathscr{B}$). ★

Exemplo D1.3.

- $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_S$ não são compactos: considere $\{(-n, n),\ n \in \mathbb{N}\}$ e $\{[-n, n),\ n \in \mathbb{N}\}$, respectivamente;
- $(0, 1)$ não é compacto: considere $\{(1/n, 1),\ n \in \mathbb{N}\}$;
- $\{1/n :\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ (subesp. de $\mathbb{R}$) é compacto (verifique);
- $[0, 1]$ é compacto: veja exercício D1.12;
- nem $[0, 1)$ nem $[0, 1]$ são compactos em $\mathbb{R}_S$: considere $\{[0, 1 - 1/n),\ n \in \mathbb{N}\}$ e adicione o (aberto) $\{1\}$ para o segundo.

- $Y = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ subesp de $\mathbb{R}$ não é compacto: considere por exemplo $\{Y \cap (-1, \sqrt{2} - 1 - 1/n),\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{Y \cap (\sqrt{2} - 1, 2)\}$ ★

Proposição D1.4. *Subespaço fechado de espaço compacto é compacto.* ◁

Proposição D1.5. *Seja $(X, \mathcal{T})$ de Hausdorff, então*

- *para todo K compacto e $x \notin K$, existem abertos disjuntos A, B tais que $K \subseteq A$ e $x \in B$.*
- *para todos K, H compactos disjuntos existem abertos disjuntos A, B tais que $K \subseteq A$ e $H \subseteq B$.*
- **todo subespaço compacto é fechado**.
- *Em particular, se X é compacto e Hausdorff, então um seu subespaço é compacto se e só se é fechado.* ◁

Observação D1.6. A hipótese X Hausdorff é necessária: em $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$ todo conjunto é compacto, mas apenas os finitos são fechados. ★

Corolário D1.7. *Todo espaço de Hausdorff compacto é normal.* ◁

Exercícios

Exercício ((EX3a-26)). Mostre que se $(X, \mathcal{T})$ é compacto e Hausdorff então vale

- se $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{S}$ então $(X, \mathcal{S})$ não é compacto;
- se $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{T}$ então $(X, \mathcal{S})$ não é hausdorff; ★

Exercício ((EX3b-26)). Mostre que em espaços métricos todo compacto é fechado e limitado.
Mostre que em geral não vale a volta . ★

D1.1 Funções em compactos

Proposição D1.8. *Seja* $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ *contínua*

- *se* X *compacto, então* $f(X)$ *é compacto;*
- *se* Y *é Hausdorff e* $K \subseteq X$ *é compacto então* $f(K)$ *é compacto e logo fechado.*
- *se* f *é bijetora com* Y *Hausdorff e* X *compacto, então* f *é homeomorfismo.* ◁

Em $\mathbb{R}$

Proposição D1.9 [Teorema dos valores extremais].
Seja $f : K \to \mathbb{R}$ *contínua com* K *compacto. Então* f *atinge máximo e mínimo.* ◁

Lema D1.10 [Da sub-base de Alexander]. *Se $\mathscr{S}$ é uma sub-base para $(X, \mathcal{T})$ e toda cobertura feita por elementos de $\mathscr{S}$ possui uma sub-cobertura finita então X é compacto (podemos testar apenas recobrimentos feitos por elementos de $\mathscr{S}$).* $\triangleleft$

Observação D1.11. No lema acima é necessário o uso de Lema de Zorn. Com o lema acima será fácil provar o Teorema de Tychonoff.
Mesmo usando outros caminhos para provar o Teorema de Tychonoff, sempre precisa usar alguma variação do axioma da escolha. ★

Lema de Zorn *Se X é um conjunto parcialmente ordenado e todo subconjunto totalmente ordenado de X tem um limitante superior então X tem um elemento maximal.*

Conjunto parcialmente ordenado: quando existe uma relação de ordem "$\preceq$"nele;
Conjunto totalmente ordenado: quando dados x, y quaisquer $x \preceq y$ ou $y \preceq x$;
Limitante superior de $Y \subseteq X$: $l \in X$ t.q. $y \preceq l$ para todo $y \in Y$.
$m \in X$ é **elemento maximal** de X: $x \in X$ e $m \preceq x$ $\implies m = x$.

São afirmações equivalentes (Princípios da teoria dos conjuntos)
Lema de Zorn,
Princípio da Boa Ordenação,
Princípio Maximal de Hausdorff,
Axioma da Escolha

> Construção para aplicação do Lema de Zorn:
>
> - seja $\mathscr{C}$ a família de todas as coberturas abertas que não possuem subcobertura finita
> - para $C, D \in \mathscr{C}$ seja $C \preceq D$ se $C \subseteq D$ (assim $\mathscr{C}$ é parcialmente ordenado);
> - se $\mathscr{C}' \subseteq \mathscr{C}$ é totalmente ordenado então $\bigcup_{C \in \mathscr{C}'} C$ é um limitante superior de $\mathscr{C}'$
> - M elemento maximal de $\mathscr{C}$ é uma cobertura aberta que não possui subcobertura finita mas tal que adicionando qualquer novo aberto possuiria subcobertura finita.

Exercícios

Exercício D1.12. Mostre que $[0,1]$ é compacto: note que os conjuntos $[0,a)$ e $(b,1]$ com $0 < a, b < 1$ formam uma sub-base.
Mostre também sem usar o lema da sub-base: dada uma cobertura aberta, defina

$$\sup\{a : \ [0,a] \text{ pode ser coberto por finitos elementos da cobertura}\}$$

e mostre que vale 1. ★

D1.2 Teorema de Tychonoff

Teorema D1.13 [de Tychonoff.]. *Produto de compactos é compacto.* ◁

Corolário D1.14. *A topologia produto é a única que faz com que as projeções sejam contínuas e o produto de compactos de Hausdorff seja compacto.* ◁

Corolário D1.15. *Um e.t. é completamente regular se e só se é homeomorfo a um subespaço de algum compacto Hausdorff.* ◁

Observação D1.16.

- Qualquer espaço compl.reg. não normal é homeomorfo a um subespaço S de um Hausdorff compacto N; então S é um **subespaço não normal de um espaço normal**.
  O plano de Sorgenfrey é um exemplo desta situação.
- Vale a volta do teorema de Tychonoff: se um produto é compacto todos os fatores são compactos.
- O teorema de Tychonoff não valeria, em geral, com a topologia da caixa: $\square_{i\in\mathbb{N}}\{0,1\}$ não é compacto. ★

Exercícios

Exercício. Prove as afirmações acima. ★

Exercício. Mostre que em $\mathbb{R}^N$ com métrica euclidiana, um conjunto é compacto se e só se é fechado e limitado. ★

D1.3 Esp. localmente compactos

Definição D1.17. $(X, \mathcal{T})$ é um e.t. **localmente compacto** se para todo $x \in X$ existe uma vizinhanças de x compacta. ★

Para espaços Hausdorff a definição de localmente compacto é equivalente a pedir que em todo $x \in X$:

- exista um sistema fundamental de vizinhanças compactas;
- exista um sistema fundamental de vizinhanças cujo fecho é compacto;
- exista uma vizinhança cujo fecho é compacto.

Proposição D1.18. *Se $(X, \mathcal{T})$ é compacto então é localmente compacto.* ◁

Exemplo D1.19.

- Todo espaço discreto é localmente compacto;
- $\mathbb{R}$ não é compacto mas é localmente compacto;
- $\mathbb{R}_S$ nao é localmente compacto;
- $\mathbb{Q}$ (com a topologia induzida por $\mathbb{R}$) não é loc. compacto.

★

Proposição D1.20. *Todo espaço de Hausdorff localmente compacto é completamente regular.* ◁

Resumo

- Subespaço[a] de Hausdorff compacto $\iff$ completamente regular
- Hausdorff compacto é normal
- Hausdorff localmente compacto é completamente regular
- não vale a volta das acima: $\mathbb{R}$ é normal mas não é compacto, $\mathbb{R}_S$ é normal (logo c.r.) mas não é loc. comp.

[a] homeomorfo a..

D1.4 Compactificação

Definição D1.21. Dizemos que $(K, \mathcal{T}_K)$ é uma **compactificação** de $(X, \mathcal{T}_X)$ se X é subespaço denso de K e K é Hausdorff e compacto.
Dizemos que K é uma **compactificação de Alexandroff** (one-point compactification) se $K = X \cup \{p\}$ com $p \notin X$. ★

Exemplo D1.22. O espaço da sequência convergente (veja Exercício B2.13) é uma compactificação de Alexandroff de $\mathbb{N}$.
(lembre que é homeomorfo a $\{1/n : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ e logo é compacto). ★

Proposição D1.23. *X é um espaço de Hausdorff loc. comp. (mas não compacto) se e só se admite uma compactificação de Alexandroff.* ◁

Resumo

Temos então

$$\text{H.L.C} \iff \exists \text{ Comp. de Alex.} \implies \text{subesp de H.C.} \iff \text{compl reg}$$

mas $\mathbb{R}_S$ não é HLC

Exemplo D1.24. A compactificação de Alexandroff de $\mathbb{R}$ é homeomorfa ao circulo em $\mathbb{R}^2$.
A compactificação de Alexandroff de $\mathbb{R}^2$ é homeomorfa à esfera em $\mathbb{R}^3$. ★

Exercícios

Exercício. Verifique as afirmações acima ★

D1.5 Compacidade e sequências

Lembrete

$x \in X$ é **ponto de acumulação (P.D.A.) de** B se $x \in \overline{B \setminus \{x\}}$.

Exercícios

Exercício.
- Mostre que todo ponto de acumulação é ponto aderente mas não vale o viceversa.
- Mostre que em espaço T_1, x é P.D.A. de B se e só se toda vizinhança de x intersecta B em infinitos pontos. ★

Definição D1.25. Dizemos que um espaço topológico X é

- **sequencialemnte compacto** se toda sequência em X e admite subsequência convergente (a um ponto de X).
- **P.D.A compacto**[a] se todo conjunto infinito em X possui P.D.A. (em X). ★

[a] Em [Mun00] é limit-point compactness, outras nomenclaturas são "compacto por pontos limite"ou "Bolzano-Weierstrass compacto"

Proposição D1.26.

1) *Todo espaço compacto é P.D.A-compacto.*
2) *Todo espaço compacto*$^{\text{ou apenas PDAcomp}}$*, T_1 e $(1^o c)$ é sequencialemnte compacto.* ◁

Exercícios

Exercício.
- Mostre que $\mathbb{R}$ com a topologia gerada pelas semiretas (a, ∞) é P.D.A-compacto mas não compacto (nem seq. compacto).
- Mostre que $\mathbb{R}$ e $(0,1)$ não são seq. compactos nem P.D.A-compactos.
- Mostre que produto não-enumerável de compactos é compacto mas não seq. compacto: (ideias: pense a $f_n(x) = \sin(nx)$ em $[-1,1]^{\mathbb{R}}$ ou $f_n(x) =$ "n^o digito binario de x" em $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$).

Note que não é ($1^o c$).

★

Observação D1.27. O subconjunto de $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ das funções que valem 1 em no máximo enumeráveis pontos é seq. compacto mas não compacto.

★

D1.6 Compacidade e sequências em esp. métricos

Proposição D1.28. *Se X é espaço métrico sequencialmente compacto então é compacto.* $\triangleleft$

> **Lema D1.29.** *Se X é espaço métrico sequencialmente compacto então para toda cobertura aberta de X existe $r > 0$ tal que para todo $x \in X$ existe um aberto da cobertura que contém $B_r(x)$.* $\triangleleft$

Corolário D1.30. *Se X é espaço métrico são equivalentes:*

- *X é compacto*
- *X é P.D.A-compacto*
- *X é sequencialmente compacto* $\triangleleft$

Corolário D1.31. *Todo espaço métrico compacto é completo.* $\triangleleft$

R^N euclidiano

Proposição D1.32 [Teorema de Heine-Borel]. *Em $\mathbb{R}^n$ (com métrica euclideana) um conjunto é compacto se e só se é fechado e limitado.* $\triangleleft$

Proposição D1.33 [Teorema de Bolzano-Weierstrass]. *Em $\mathbb{R}^n$ (com métrica euclideana):*

- *toda sequência limitada admite subsequência convergente;*
- *todo subconjunto infinito e limitado admite ponto de acumulação.* $\triangleleft$

Resumo

- **Comp $\Longrightarrow$ PDA-Comp**
- em T_1 e $(1^o c)$, **Comp $\Longrightarrow$ seq.-Comp**
- em geral, **Comp e seq.-Comp são independentes**
- em metricos, **Comp $\Longleftrightarrow$ PDA-Comp $\Longleftrightarrow$ seq.-Comp**

D1.7 Caracterização de compactos em métricos

Definição D1.34. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que $A \subseteq X$ é totalmente limitado se, para todo $\varepsilon > 0$ existem $x_1, ..x_n \in A$ (finitos) tais que $A \subseteq \bigcup_{i=1,..,n} B_\varepsilon(x_i)$ ★

Lema D1.35. *Subconjunto de espaço métrico totalmente limitado é totalmente limitado* ◁

Exercícios

Exercício. Mostre que totalmente limitado implica limitado, mas não vale o viceversa:

- mostre que $\mathbb{N}$ com a métrica discreta é limitado mas não totalmente;
- mostre que $c_0 := \{s : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \; s_n \to 0\}$ com a métrica $d(s,t) = \sup\{|s_n - t_n| : \; n \in \mathbb{N}\}$ é um espaço métrico; o subespaço $B = \{s \in c_0 : \; d(s, 0) \leq 1\}$ é limitado mas não totalmente (considere $(s^k)_n = \delta_{n,k}$).

★

Proposição D1.36. *Um espaço métrico é compacto se e só se é completo e totalmente limitado.* ◁

Corolário D1.37. *Em espaço métrico completo, um conjunto é compacto se e só se é fechado e totalmente limitado.* ◁

Observação D1.38. Apenas limitado não é suficiente

- $\mathbb{N}$ discreto é fechado, limitado e completo mas não compacto (não é tot. limit.)
- o conjunto B em c_0 do exercício acima é limitado e fechado mas não compacto (não é tot. limit.).
- $\mathbb{R}$ com a métrica finita equivalente à usual é limitado, e tot. limit, porém não é compacto (não é completo)

★

R^N euclidiano

Proposição D1.39 [Heine-Cantor]. *Em espaços métricos compactos, toda função contínua (a valores em esp. métrico) é uniformemente contínua.* ◁

Referências

[Aur22] L. Aurichi. *Notas de aula.* 2022, p. 163.

[Dug66] J. Dugundji. *Topology.* Allyn e Bacon, Inc., Boston, MA, 1966, pp. xvi+447.

[Fol99] G. B. Folland. *Real analysis.* Second. Pure and Applied Mathematics (New York). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, pp. xvi+386. ISBN: 0-471-31716-0.

[Mun00] J. R. Munkres. *Topology.* Second. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000, pp. xvi+537. ISBN: 0-13-181629-2.

Conteúdo

Lista dos teoremas

Lista dos exercícios

Z1 Teoremas para saber provar - P1

Proposição A2.6 – Top. gerada por base
Lema A2.10 – comparação top. via base
Proposição B1.1 – caracterização T_1
Proposição B1.4 – caracterizações $T_0, .., T_4$
Teorema B1.7 – métrico é normal
Proposição B2.4 – propr. de enumerabilidade de métricos
Teorema B2.6 – $(2^0 c)$ e regular é normal
Proposição B2.11 – fecho e sequências
Proposição C1.2 – conjunto $f = g$
Teorema C1.5 – Lema de Urysohn (sem precisar provar o lema C1.8, mas sabendo o enunciado)
Proposição C2.1 – topologia inicial
Proposição C2.4 – topologia final
Proposição C3.6 – produto e fecho
Proposição C3.14 – ax. enumerabilidade produtos
Proposição C4.3 – mapa quociente e rel de eq.
Proposição D1.4 – e Proposição D1.5 – propr. compactos
Teorema D1.13 – de Tychonoff (assumindo o lema da sub-base)
Proposição D1.26 – (apenas ponto 1) PDAcomp
Proposição D1.28 – com lema D1.29: metrico seq. compacto

Z2 Teoremas para saber provar - P2