Prova 2 de SMA178 - Tópicos de matemática elementar
Professor: Eugenio Massa 6/06/2006

Escreva o nome e o número USP em todos os papeis que entregar
JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS E AFIRMAÇÕES

Questão 1. (2 pontos)
Considere três dados diferentes (cada um de 6 faces): o dado D1 é equilibrado, enquanto os outros dois são viciados da seguinte maneira: pelo D2 todos os números pares têm a mesma probabilidade de sair, e todos os ímpares também, mas a probabilidade de sair par é o dobro da de sair ímpar. Pelo D3, P(1)=1/3, P(2)=1/3, enquanto os outros resultados são eqüiprováveis.
a) Calcular a probabilidade de cada resultado para cada um dos três dados.
Considere o seguinte fenômeno aleatório: é escolhido um dado ao acaso e jogado duas vezes.
b) Qual é a probabilidade de sair 1 na primeira jogada?
c) Qual é a probabilidade de sair 1 na segunda jogada sabendo que saiu 1 na primeira?
d) O evento sair 1 na segunda jogada e o evento sair 1 na primeira jogada são independentes?
e) Sabendo que saiu 1 em ambas as jogadas, calcular a probabilidade de o dado jogado ter sido o D1, o D2 ou o D3, respectivamente. Qual dado é mais verossímil que tenha sido jogado?
[Pontuação: a) 0.5; estudo e modelagem do fenômeno 0.5; b,c) 0.2 cada; d,e) 0.3 cada]
(desde que os resultados sejam devidamente justificados)

Questão 2. (2 pontos)
a) É possível construir um poliedro convexo com 10 faces, 8 vértices e 20 arestas?
Outro poliedro convexo P é composto por 13 vértices e 11 faces, das quais exatamente 9 são quadriláteros. Calcular
b) o número de arestas de P,
c) o número de lados das duas faces não quadriláteras de P.
d) Sabendo que P tem exatamente um vértice do qual saem 5 arestas, podemos dizer quantos vértices há dos quais saem 4 arestas? Em caso contrário, quais são as possibilidades?
e) Calcular o número e o tipo de faces, o número de arestas e o número de vértices, de um poliedro regular tal que em cada vértice entram exatamente 5 arestas.
[Pontuação: a) 0.2; b) 0.3; c,d,e) 0.5 cada]
(desde que os resultados sejam devidamente justificados)

Questão 3. (2 pontos)
Considere no plano XY os pontos $A = (1, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (5, 1)$, $D = (3, 2)$, $E = (2, 8)$, $F = (1, 2)$.
a)Calcule comprimento e centro de gravidade da linha poligonal (fechada) P=ABCDEF(A)
b)Calcule área e centro de gravidade da região R interna à poligonal P.
c)Calcule a área da superfície de revolução obtida quando a poligonal P gira ao redor do eixo y.
d)Calcule a área da superfície de revolução obtida quando a poligonal P gira ao redor do eixo x.
e)Calcule o volume do sólido de revolução obtido quando a região R gira ao redor do eixo y.
f)Calcule o volume do sólido de revolução obtido quando a região R gira ao redor do eixo x.
[Pontuação: desenho 0.3; a) 0.7; b) 0.6; c,d,e,f) 0.1 cada]
(desde que os resultados sejam devidamente justificados)

Questão 4. (2 pontos)
Uma empresa produz lâmpadas que têm uma probabilidade $p \in (0,1)$ de ter defeito. Queremos determinar quantas lâmpadas (k) precisamos comprar para ter uma probabilidade de pelo menos P de ter pelo menos n lâmpadas sem defeito:
a) escrever (em função das variáveis P, p, k, n) a desigualdade que fornece (implicitamente) a solução (k) deste problema.
b) Determinar quantas lâmpadas preciso comprar para ter uma probabilidade de pelo menos 90% de ter pelo menos 3 lâmpadas sem defeito, se $p = 1/5$. Quanto vale exatamente esta probabilidade?
c) Com o número de lâmpadas calculado ao ponto (b), calcular a probabilidade de ter pelo menos 4 lâmpadas sem defeito.

[Pontuação: a) 0.7; b) 0.5+0.3; c) 0.5]
(desde que os resultados sejam devidamente justificados)

Questão 5. (2 pontos)
Dois jogadores A e B participam do seguinte jogo: há uma urna contendo 10 bolas pretas e 12 bolas vermelhas. As bolas são extraídas uma depois da outra até esvaziar a urna. Se ao longo da extração tiver um momento em que o número de bolas vermelhas extraídas for superior ao número de bolas pretas extraídas por pelo menos 5 unidades ($V - P \geq 5$), então A ganha um prêmio; se tiver um momento em que o número de bolas pretas extraídas for superior ao número de bolas vermelhas extraídas por pelo menos 4 unidades ($P - V \geq 4$), então B ganha um prêmio.
a) Qual é a probabilidade de A ganhar um prêmio? Qual é probabilidade de B ganhar um prêmio?

[Pontuação: modelagem do problema e explicação da técnica de resolução usada 1.4; a) 0.6]
(desde que os resultados sejam devidamente justificados)

Questão Extra. (MAIS 2 pontos!!)
Voltando a considerar o problema anterior, qual é a probabilidade de ambos ganharem um prêmio? Qual é a probabilidade de nenhum dos dois ganhar um prêmio?

Gabarito

Questão 1.

a) Dado D1: $P(i) = 1/6$: $i = 1, ..., 6$.

Dado D2: P(par)=2P(ímpar) então P(par)=2/3 e P(ímpar)=1/3, logo P(i)=2/9 se i par P(i)=1/9 se i ímpar.

Dado d3: P(1)=1/3, P(2)=1/3, então P(i)=1/12 para $i = 3, .., 6$.

Desenhemos agora a arvore de probabilidade pondo primeiro a escolha do dado (P=1/3 a cada um), depois o resultado da primeira jogada e enfim o resultado da segunda jogada. Em particular, as probabilidades interessantes são a de sair 1 ou diferente de 1: a probabilidade de sair 1 é 1/6, 1/9 e 1/3 pelos dados D1, D2 e D3 respectivamente.

Logo temos as seguintes probabilidades (x significa diferente de 1):

dado D1 resultado 1 - 1 : $P = \frac{1}{3*6*6} = \frac{1}{108} = \frac{9}{972}$,
dado D1 resultado 1 - x : $P = \frac{5}{3*6*6} = \frac{5}{108} = \frac{45}{972}$,
dado D1 resultado x - 1 : $P = \frac{5}{3*6*6} = \frac{5}{108} = \frac{45}{972}$,
dado D1 resultado x - x : $P = \frac{5*5}{3*6*6} = \frac{25}{108} = \frac{225}{972}$,
dado D2 resultado 1 - 1 : $P = \frac{1}{3*9*9} = \frac{1}{243} = \frac{4}{972}$,
dado D2 resultado 1 - x : $P = \frac{8}{3*9*9} = \frac{8}{243} = \frac{32}{972}$,
dado D2 resultado x - 1 : $P = \frac{8}{3*9*9} = \frac{8}{243} = \frac{32}{972}$,
dado D2 resultado x - x : $P = \frac{8*8}{3*9*9} = \frac{64}{243} = \frac{256}{972}$,
dado D3 resultado 1 - 1 : $P = \frac{1}{3*3*3} = \frac{1}{27} = \frac{36}{972}$,
dado D3 resultado 1 - x : $P = \frac{2}{3*3*3} = \frac{2}{27} = \frac{72}{972}$,
dado D3 resultado x - 1 : $P = \frac{2}{3*3*3} = \frac{2}{27} = \frac{72}{972}$,
dado D3 resultado x - x : $P = \frac{2*2}{3*3*3} = \frac{4}{27} = \frac{144}{972}$.

Disso deduzimos que:

b) somando os casos onde saiu 1 na primeira temos $P(1 \text{ na primeira}) = \frac{9+45+4+32+36+72}{972} = \frac{198}{972} = \frac{11}{54} \simeq 0.2$;

c) considerando os casos onde saiu 1 em ambas entre os onde saiu 1 na primeira, temos $P(1 \text{ na segunda} \mid 1 \text{ na primeira}) = \frac{9+4+36}{198} = \frac{49}{198} \simeq 0.25$;

d) ainda olhando a arvore temos que $P(1 \text{ na segunda}) = \frac{9+45+4+32+36+72}{972} = \frac{198}{972} \simeq 0.2$: se os eventos fossem independentes isso deveria ser igual ao resultado do ponto (b), mas não é, então os eventos são dependentes.

e) Como $P(1 \text{ em ambas}) = \frac{9+4+36}{972} = \frac{49}{972}$, temos que as tres probabilidades condicionais pedidas são, respectivamente, $P(D1 \mid 1 \text{ em ambas}) = \frac{9}{49}$, $P(D2 \mid 1 \text{ em ambas}) = \frac{4}{49}$, $P(D3 \mid 1 \text{ em ambas}) = \frac{36}{49}$. Logo o dado mais verossímil é o D3.

Questão 2.

a) Não é possível, pois pelo teorema de Euler deveria ser $F + V - A = 2$.

b) Usando o teorema de Euler computamos $A = F + V - 2 = 22$.

c) Usando a relação $2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + ... = 3F + F_4 + 2F_5 + 3F_6 + ...$ deduzimos que $11 = 9 + 2F_5 + 3F_6 + ...$ e então só pode ter uma face de 5 lados e a remanescente deve ser de 3.

d) Usando a relação $2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + ... = 3V + V_4 + 2V_5 + 3V_6 + ...$ deduzimos que $5 = V_4 + 2 + 3V_6 + ...$, então ficamos com apenas duas possibilidades: ou $V_5 = 1$, $V_4 = 3$ $V_3 = 9$, ou $V_5 = 1$, $V_6 = 1$ $V_3 = 11$.

e) Como em todo vértice entram 5 arestas, temos $2A = 5V$.

Seja n (obviamente com $n \geq 3$) o número de lados de cada face, temos então $2A = nF$ e pelo teorema

de Euler então $F+V-A=A(2/n+2/5-1)=2$.
Logo $A=\frac{10n}{10+2n-5n}=\frac{10n}{10-3n}$; devendo ser positivo deduzimos que $n=3$, logo $A=30$, $V=12$, $F=20$: o poliedro obtido é composto por 20 faces triangulares.

Questão 3.
Consideremos cada segmento da poligonal:
AB: comprimento $c_1=2$, ponto médio $M_1=(2,0)$;
BC: comprimento $c_2=\sqrt{5}$, ponto médio $M_2=(4,0.5)$;
CD: comprimento $c_3=\sqrt{5}$, ponto médio $M_3=(4,1.5)$;
DE: comprimento $c_4=\sqrt{37}$, ponto médio $M_4=(2.5,5)$;
EF: comprimento $c_5=\sqrt{37}$, ponto médio $M_5=(1.5,5)$;
FA: comprimento $c_6=2$, ponto médio $M_6=(1,1)$.
Logo o comprimento da poligonal P será a soma $C_P=\sum_{i=1}^{6}c_i=4+2\sqrt{5}+2\sqrt{37}\simeq 20.64$ e o centro de gravidade da poligonal P terá coordenadas $x_P=\frac{\sum_{i=1}^{6}x_ic_i}{\sum_{i=1}^{6}c_i}=\frac{6+8\sqrt{5}+4\sqrt{37}}{4+2\sqrt{5}+2\sqrt{37}}\simeq 2.34$ e $y_P=\frac{\sum_{i=1}^{6}y_ic_i}{\sum_{i=1}^{6}c_i}=\frac{2+2\sqrt{5}+10\sqrt{37}}{4+2\sqrt{5}+2\sqrt{37}}\simeq 3.26$.
Consideremos os retângulos ABDF e os triângulos BCD e DEF:
ABDF: área $A_1=4$, centro de gravidade $CG_1=(2,1)$;
BCD: área $A_2=2$, centro de gravidade $CG_2=(3+2/3,1)$;
DEF: área $A_3=6$, centro de gravidade $CG_3=(2,4)$.
Logo a área da região R será a soma $A_R=\sum_{i=1}^{3}A_i=12$, a abscissa do seu centro de gravidade será $x_R=\frac{\sum_{i=1}^{3}x_iA_i}{\sum_{i=1}^{3}A_i}=\frac{27+1/3}{12}\simeq 2.27$, enquanto a ordenada será $y_R=\frac{\sum_{i=1}^{3}y_iA_i}{\sum_{i=1}^{3}A_i}=\frac{30}{12}\simeq 2.5$.
Pelos teoremas de Pappus temos:
c) $A=2\pi x_PC_P\simeq 303.46$;
d) $A=2\pi y_PC_P\simeq 422.77$;
e) $V=2\pi x_RA_R\simeq 171.15$;
f) $V=2\pi y_RA_R\simeq 188.49$.

Questão 4.
Se eu comprar k lâmpadas, a probabilidade de ter exatamente i sem defeito é $C_k^i\,(1-p)^i\,(p)^{k-i}$ (teorema binomial).
a) O problema é encontrar k tal que $\sum_{i=n}^{k}C_k^i\,(1-p)^i\,(p)^{k-i}\geq P$.
b) No caso $n=3$, $P=0.9$ e $p=1/5$, precisamos resolver $\sum_{i=3}^{k}C_k^i\left(\frac{4}{5}\right)^i\left(\frac{1}{5}\right)^{k-i}\geq 0.9$.
Sendo os números pequenos vale a pena de simplesmente substituir na formula: seja P^* a soma acima,
k=3 implica $P^*=\left(\frac{4}{5}\right)^3=0.512$,
k=4 implica $P^*=4\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^1+\left(\frac{4}{5}\right)^4=0.819$,
k=5 implica $P^*=10\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^2+5\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)^1+\left(\frac{4}{5}\right)^5=0.942$.
Logo a resposta é $k=5$ e a probabilidade pedida é $P^*=0.942$.
c) Com $k=5$ a probabilidade de ter pelo menos 4 não defeituosa é $\sum_{i=4}^{5}C_5^i\left(\frac{4}{5}\right)^i\left(\frac{1}{5}\right)^{5-i}=5\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)^1+\left(\frac{4}{5}\right)^5=0.737$.

Questão 5.
Modelamos o problemas como o de contar os caminhos formados por segmentos do tipo $(x,y)\to(x+1,y\pm 1)$, que unem o ponto $(0,0)$ com o ponto $(22,2)$, assim que cada caminho representa uma seqüencia de extração, a abscissa representa o numero de bolas extraídas e a ordenada a diferença V-P (vermelhas - pretas) extraídas.

Cada caminho deverá então subir 12 vezes e descer 10, o que pode ser feito de $P_{22}^{12,10}$ maneiras diferentes (caminhos diferentes). A ganhará um prêmio se o caminho tocar a reta $y = 5$, B ganhará um prêmio se o caminho tocar na reta $y = -4$.

Pelo princípio de reflexão o número de caminhos que tocam a reta $y = 5$ são tantos quantos os caminhos que conectam o ponto $(0, 10)$ (refletido de $(0, 0)$ a respeito da reta) com o ponto $(22, 2)$. Ditos caminhos deverão ter S subidas e D descidas sendo $D + S = 22$ e $D - S = 8$; logo $D = 15$ e $S = 7$, dando $P_{22}^{15,7}$ caminhos diferentes.

Analogamente o número de caminhos que tocam a reta $y = -4$ são tantos quantos os caminhos que conectam o ponto $(0, -8)$ (refletido de $(0, 0)$ a respeito da reta) com o ponto $(22, 2)$. Ditos caminhos deverão ter S subidas e D descidas sendo $D + S = 22$ e $S - D = 10$; logo $D = 6$ e $S = 16$, dando $P_{22}^{16,6}$ caminhos diferentes.

Logo $P(\text{A ganhar um prêmio}) = \frac{P_{22}^{15,7}}{P_{22}^{12,10}} \simeq 0.2637$ enquanto $P(\text{B ganhar um prêmio}) = \frac{P_{22}^{16,6}}{P_{22}^{12,10}} \simeq 0.1154$

Questão Extra.

Precisamos contar os caminhos que tocam ambas as retas.

Primeiro notemos que nenhum caminho pode tocar a reta $y = -4$, depois tocar a $y = 5$ e ainda voltar a tocar a $y = -4$, pois para isso precisariam $4 + 9 + 9 + 6 = 28$ extrações. Também nenhum caminho pode tocar a reta $y = 5$, depois tocar a $y = -4$ e ainda voltar a tocar a $y = 5$, pois para isso precisariam $5 + 9 + 9 + 3 = 26$ extrações.

Logo precisaremos contar os caminhos que tocam primeiro a reta $y = -4$ e depois a $y = 5$, e os que tocam primeiro a reta $y = 5$ e depois a $y = -4$, sem possibilidade de estar contando um caminho duas vezes.

Lembrando que os caminhos que tocam a reta $y = 5$ foram contados como os que saem do ponto (0,10), queremos primeiro contar (entre eles) os que tocam a reta $y = -4$: pela mesma técnica corresponderão a caminhos saindo do ponto (0, -18) (refletido de (0,10)): então D+S=22, S-D=20 e logo S=21 D=1 e então são $P_{22}^{21,1}$.

Mas observe-se que os caminhos contados acima são de fato os que tocam a reta $y = 5$ primeiro.

Para contar os que tocam a reta $y = -4$ primeiro, consideraremos a mesma técnica, contando então os caminhos saindo de (0,18) (refletido de (0,-8) respeito à reta $y = 5$): então D+S=22, D-S=16 e logo D=19 S=3 e então são $P_{22}^{19,3}$.

Concluindo, ambos ganham um prêmio com probabilidade $P = \frac{P_{22}^{21,1} + P_{22}^{19,3}}{P_{22}^{10,12}} \simeq 2.4E - 3$.

Através disso calculamos a probabilidade de pelo menos um ganhar, isto é (pelo princípio de inclusão e exclusão) $P(\text{A ganhar um prêmio}) + P(\text{B ganhar um prêmio}) - P(\text{ambos ganharem um prêmio}) \simeq 0.3767$ e logo a probabilidade de nenhum ganhar será $P = 0.6233$.