RELATÓRIO DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA:

Análise não-standard, Ultrafunções, infinito e infinitésimos, com aplicações

Bolsista:

Otávio Augusto Biasi

Orientador:

Eugenio Massa

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Número do Processo FAPESP: 2024/02878-8
Período de vigência do projeto: 01/08/2024 a 31/07/2025
Período coberto por este relatório: 01/08/2024 a 31/07/2025
Relatório Científico Final.

Sumário

Resumo do Projeto

Este projeto visava percorrer um caminho introdutório de assuntos de topologia e análise, que não são normalmente encontrados nas disciplinas de matemática do curso de engenharia, com o duplo objetivo de apresentá-los ao aluno, discente de engenharia mas com forte interesse na matemática mais abstrata, aprimorando seus instrumentos matemáticos e suas habilidade de raciocínio matemático, e também de pô-lo em condição, no final do projeto ou num possível segundo ano, de ler alguns trabalhos recentes do Prof. V. Benci, da universidade de Pisa (Itália) sobre a teoria dos corpos não-arquimedianos e das ultrafunções, chegando se possível a ver pelo menos uma aplicação a um problema físico ou matemático mais avançado.

Resultados alcançados

Os objetivos propostos para um ano de projeto foram amplamente alcançados, a saber,

- estudamos conceitos básicos de análise e topologia pelos livros clássicos [LIM04, LIM76];
- estudamos os conceitos topológicos mais avançados de redes e filtros e suas aplicações, através da referência [Kha];
- estudamos os conceitos básicos da análise não-standard fazendo a construção de um corpo ordenado não-arquimediano, seguindo principalmente a referência [Kei76], e pondo as bases para a construção das ultrafunções, seguindo [BB16, Ben22].

O bolsista deste projeto manifestou o desejo de se aplicar para uma iniciação científica em uma área mais próxima da Engenharia Elétrica (que ele está cursando), e por isso preferiu não pedir renovação para este projeto. Agradecemos a Fapesp pelo apoio dado neste ano e pela oportunidade ímpar que nos deu de estudar os problemas deste projeto, os quais ofereceram grande amadurecimento e desenvolvimento cientifico para o aluno.

1 Introdução

No início do desenvolvimento do Cálculo, com Newton e Leibniz no Século XVII, e ainda dois séculos depois, haviam alguns problemas na sua formulação e estrutura. Ele não era matematicamente rigoroso, possuindo falhas lógicas em sua base.

O Cálculo apelava para uma ideia um pouco abstrata, a ideia do infinitésimo, que representa uma quantidade infinitamente pequena, que se aproximavam de zero, mas não chega a ser zero. Os infinitésimos possuem um grande apelo intuitivo, porque nos aproximam da ideia de instantes de tempo, velocidade instantânea, pontos materiais. Eles estavam presentes no início do Cálculo, mas não possuíam uma formulação rigorosa.

No século XIX, com a necessidade da formalização e do rigor matemático e com o surgimento da Análise Matemática, matemáticos como Bolzano e Weierstrass utilizaram o métodos dos "ε, δ"e a noção de limite, trazendo um rigor matemático que fez com que não fosse mais necessária a ideia de infinitésimos, que foi então descartada e caiu em esquecimento.

Foi somente um século mais tarde, em 1960, que Abraham Robinson introduziu o conceito da Análise Não-Standard, formalizando de maneira adequada a ideia dos infinitésimos, construindo o corpo dos Super-Reais, que estende o corpo dos reais, mas para isso foi preciso introduzir conceitos novos.

Como discutiremos neste trabalho, o corpo dos Reais é o único Corpo Ordenado Completo. Para a realização da mencionada extensão dos reais, devemos abrir mão de uma destas propriedade: o corpo dos Super-Reais não será mais completo e também não satisfará a Propriedade Arquimediana que diz que o conjunto dos naturais não é limitado dentro dele.

O trabalho será estruturado como segue: na seção 2 introduzimos o conceito de corpo, suas propriedades e fornecemos alguns exemplos; na seção 3 introduzimos espaços métricos e em seguida, na seção 4, os espaços topológicos, desenvolvendo os conceitos de redes e filtros como instrumentos para estudar a estrutura de tais espaços. Na seção 5 analisamos as propriedades dos corpos não-arquimedianos e finalmente, na seção 6, mostramos como construir um corpo super-real que estende os reais contendo infinitos e infinitésimos. Finalmente, na seção 7, construímos um espaço que será a base para a definição das ultrafunções.

2 Corpos

Um corpo[1] é um conjunto K, munido de duas operações, de adição e de multiplicação[2], que satisfazem a certas condições, chamadas de axiomas de corpo.

A operação de adição associa a dois valores $x, y \in K$ sua soma, indicada por $x+y \in K$, enquanto que a multiplicação associa a eles seu produto, indicado por $x \cdot y \in K$.

Os axiomas a que essas operações obedecem são:

[1]Estamos seguindo para esta parte a referência [LIM04].

[2]Usaremos também as palavras soma e produto para indicar, respectivamente, adição e multiplicação.

1. Associatividade: para quaisquer $x, y, z \in K$, tem-se que $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

2. Comutatividade: para quaisquer $x, y \in K$, tem-se que $x + y = y + x$ e $x \cdot y = y \cdot x$.

3. Elementos neutros: para a adição, existe o número $0 \in K$, tal que $x + 0 = x$ para qualquer $x \in K$; para a multiplicação, existe o número $1 \in K$, tal que $x \cdot 1 = x$ para qualquer $x \in K$.

4. Inversos: todo $x \in K$, possui um inverso aditivo $-x \in K$, tal que $x + (-x) = 0$; todo $x \in K \setminus \{0\}$ possui um inverso multiplicativo x^{-1}, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

5. Distributividade: para $x, y, z \in K$, tem-se que, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Exemplo 2.1. Um exemplos de corpo é o conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$, com as operações usualmente definidas.

Outro exemplo é o seguinte: $X = \mathbb{Z}_2 := \{0; 1\}$ com $a + b := (a + b)(mod 2)$ e $a \cdot b := (a \cdot b)(mod 2)$, onde $n(mod 2)$ indica o resto da divisão do inteiro n por 2. ◁

Dos axiomas acima, resultam todas as regras familiares que aprendemos a osar com os racionais.

Propriedades que valem em corpos.

- Das propriedades 2, 3 e 4, tem-se que $0 + x = x$ e $(-x) + x = 0$, para todo $x \in K$.
  Para dois valores $x, y \in K$ definimos $x - y := x + (-y)$, chamada de <u>diferença</u> entre x e y.

- Analogamente temos que $1 \cdot x = x$, $x^{-1} \cdot x = 1$ e para dois valores $x, y \in K$ com $y \neq 0$, definimos $x/y := x \cdot y^{-1}$, chamado de quociente (ou <u>divisão</u>) de x por y.

- <u>Inversos são únicos.</u> Por exemplo, suponha que existam dois inversos aditivos y, z de um $x \in K$. Então $x + y = 0$ e $x + z = 0$. Somando z na primeira igualdade, tem-se $z + x + y = z$, mas $z + x = 0$ então $z = 0 + y = y$, o que mostra que há um único inverso aditivo.

- Elementos <u>neutros são únicos</u>. Por exemplo, suponha que existam dois elementos neutros da <u>adição</u> $y, z \in K$. Então $x + y = x$ e $x + z = x$ para todo $x \in K$. Então $y + z = y$ e $z + y = z$, logo $y = z$, o que mostra que apenas existe um elemento com as propriedade de 0.

- $\underline{x = (x^{-1})^{-1} = -(-x))}$. Por exemplo, escrevendo $x \cdot x^{-1} = 1$ e multiplicando por $(x^{-1})^{-1}$ temos $x \cdot x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1} = x = (x^{-1})^{-1}$.

- $\underline{x \cdot 0 = 0}$ para todo $x \in K$. Usando 4 e 5 temos $x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) = x \cdot (0 + 0) + (-(x \cdot 0)) = x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) = 0$.

- $\underline{-x = (-1) \cdot x}$ para todo $x \in K$. Usando 4 e 5, $x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1).x = (1 - 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0$.

- Anulamento do produto: se $x \cdot y = 0$ então ou $x = 0$ ou $y = 0$. Com efeito, se $x \neq 0$, então podemos multiplicar ambos lados por x^{-1}, ficando $x^{-1} \cdot x \cdot y = 1 \cdot y = y = x^{-1} \cdot 0 = 0$, então $y = 0$.

- Regras de sinal: Das propriedades 4 e 5 temos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$: de fato $x \cdot y + x \cdot (-y) = x \cdot (y - y) = x \cdot 0 = 0$ e logo $x \cdot (-y)$ é o inverso aditivo de $x \cdot y$. Analogamente $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ e $(-x) \cdot (-y) = -((-x) \cdot y) = x \cdot y$.

  Vem da regra de sinais, em particular, que $(-1) \cdot (-1) = 1$.

$\square$

2.1 Corpos Ordenados

Um corpo K é chamado de corpo ordenado, quando destacamos um seu subconjunto $K^+ \subset K$, que diremos ser dos *elementos positivos de* K, satisfazendo as propriedades:

C1 A soma e o produto de elementos positivos são positivos. Ou seja, $x, y \in K^+ \Rightarrow x + y \in K^+$ e $x \cdot y \in K^+$.

C2 Dado $x \in K$, exatamente uma das alternativas ocorre: ou $x \in K^+$, ou $x = 0$, ou $-x \in K^+$.

Se indicarmos por $K^- = \{-x : \ x \in K^+\}$, a condição C2 dirá que $K = K^+ \cup K^- \cup \{0\}$ e os conjuntos K^+, K^-, $\{0\}$ são dois a dois disjuntos. Os números $y \in K^-$ são chamados *elementos negativos de* K.

Definimos também a relação $x < y$, ou seja, x *é menor que* y, quando $y - x \in K^+$, isto é, quando $y = x + z$ sendo z um número positivo. Analogamente, escreve-se $x > y$, ou seja, x *é maior que* y se $y - x \in K^-$.

Das condições C1 e C2, podemos obter algumas propriedades da relação de ordem $x < y$ em K.

- Transitividade: se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$. De fato, $y - x, \ z - y \in K^+$ implica $y - x + z - y = z - x \in K^+$ pela propriedade C1.

- Tricotomia: dados $x, y \in K$, exatamente uma das alternativas ocorre: $x = y$, $x < y$ ou $y < x$.

- Monotonicidade da adição: se $x < y$ então, para todo $z \in K$, ocorre que $x+z < y+z$. De fato $y - x \in K^+$ é equivalente a $y + z - (x + z) \in K^+$. Aplicando a propriedade duas vezes obtemos também que se $x < y$ e $z < w$ então $x + z < y + w$.

- Monotonicidade da multiplicação: se $x < y$ então, para todo $z > 0$, tem-se que $xz < yz$. De fato $y - x$, $z \in K^+$ implica pela propriedade C1 que $yz - xz \in K^+$. Aplicando a propriedade duas vezes obtemos também que se $0 < x < y$ e $0 < z < w$ então $0 < x \cdot z < y \cdot w$.

  Por outro lado, se $x < y$ e $z < 0$, tem-se que $-z > 0$ e logo $-z \cdot x < -z \cdot y$, ou seja,

pela monotonicidade da adição, $z \cdot x > z \cdot y$.
Note também que necessariamente $1 > 0$. De fato, suponha por contradição que $1 \in K^-$ e logo $-1 \in K^+$: então pela regra de sinais, $(-1) \cdot (-1) = 1 \in K^-$ o que é uma contradição com a propriedade C1.

- Propriedades com respeito a inversos: se $0 < x < y$ então $-y < -x < 0$ e $0 < y^{-1} < x^{-1}$. De fato, somando $-x$ temos $-x < 0 < y - x$ e somando $-y$ temos $-x - y < -y < -x$. Para a multiplicação, temos que $y^{-1} > x^{-1} > 0$ pois caso contrário concluiríamos $x^{-1} \cdot x = 1 < y^{-1} \cdot y = 1 < 0$.

Exemplo 2.2. Em $\mathbb{Q}$, podemos definir os elementos positivos da forma usual, obtendo assim um corpo ordenado.

Já em $\mathbb{Z}_2$ não é possível definir elementos positivos: como $1 + 1 = 0$, 1 é seu próprio inverso aditivo e logo não seria possível definir K^+ e K^- disjuntos. $\triangleleft$

Como em um corpo ordenado vale $0 < 1$, temos que $1 < 1 + 1$, $1 + 1 < 1 + 1 + 1$ e assim por diante, ou seja, existe em K uma sequência de elementos todos distintos que podemos relacionar com os elementos de $\mathbb{N}$. Como K é um corpo, também os inversos aditivos e multiplicativos e as somas e produtos destes elementos estão em K, ou seja, **em todo corpo ordenado existe um subconjunto que podemos identificar com** $\mathbb{Q}$.

Note que quanto dito acima não é verdade para corpos não ordenados, por exemplo, em $\mathbb{Z}_2$ temos que $1 + 1$ não é um novo elemento distinto de 0 e de 1, já que é 0.

2.2 Supremo e Ínfimo

Em um corpo ordenado K, podemos considerar as seguintes definições.

Definição 2.3. Um conjunto $X \subseteq K$ diz-se *limitado superiormente* quando existe algum $b \in K$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que b é uma cota superior de X.

Analogamente, podemos dizer que um conjunto $X \subseteq K$ é limitado inferiormente quando existe algum $c \in K$ tal que $c \leq x$ para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que c é uma cota inferior de X. $\triangleleft$

Definição 2.4. Seja $X \subseteq K$ um conjunto limitado superiormente e não-vazio. Um número $b \in K$ é chamado de supremo de X quando é a menor das cotas superiores de X. Escreve-se $supX$ para referenciar o supremo do conjunto X.

Analogamente, se $X \subseteq K$ é limitado inferiormente e não-vazio, um número $c \in K$ é chamado de ínfimo de X quando é a maior das cotas inferiores de X. Escreve-se $infX$ para referenciar o ínfimo do conjunto X. $\triangleleft$

A noção de supremo surge da necessidade de substituir a ideia de maior elemento de um conjunto, quando este elemento não pertence ao conjunto. Por exemplo, em $\mathbb{Q}$, 1 é o supremo tanto de $X = [0, 1)$ quanto de $Y = [0, 1]$ e de $Z = \{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}\}$, porem apenas Y possui um maior elemento.

2.3 Corpos Ordenados Arquimedianos

Lembrando que em um corpo ordenado sempre existe um conjunto correspondente a $\mathbb{N}$, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.5. *Num corpo ordenado K as seguintes afirmações são equivalentes.*

- *i) O conjunto $\mathbb{N} \subset K$ dos números naturais não é limitado superiormente;*
- *ii) dados $a, b \in K$ com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$;*
- *iii) o ínfimo do conjunto $X = \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ é igual a 0.*

Demonstração. i) $\to$ ii). Se $\mathbb{N}$ não é limitado, dados $a > 0$ e $b \in K$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $b/a < n$ e, portanto, $b < a \cdot n$.
Para provar que ii) $\to$ iii), dado $a > 0$, existe, em virtude de ii), um $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > 1$. Então $0 < 1/n < a$, mostrando que nehum $a > 0$ é cota inferior, assim 0 é a maior das cotas inferiores.
Finalmente, para mostrar que iii) $\to$ i), dado qualquer $b > 0$, existe por iii) um $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < 1/b$ ou seja, $n > b$. Assim, nenhum elemento positivo em K pode ser cota superior de $\mathbb{N}$. Evidentemente, um elemento negativo também não pode. Logo $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente. □

Um corpo ordenado K chama-se <u>arquimediano</u> quando nele é válida qualquer das três condições equivalentes citadas no Teorema 2.5.

Exemplo 2.6. No corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais, o conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ é limitado inferiormente, pois $\mathbb{N} \subset [0, \infty)$, mas não é limitado superiormente: de fato, dado qualquer $p/q \in \mathbb{Q}$ tem-se $|p| + 1 \in \mathbb{N}$ e $|p| + 1 > p/q$. Logo <u>$\mathbb{Q}$ é arquimediano</u>. ◁

Exemplo 2.7 (Corpo ordenado não-arquimediano)**.** O conjunto $\mathbb{Q}(t)$, das funções racionais $r(t) = p(t)/q(t)$, onde p e q são polinômios com coeficientes racionais, sendo q não identicamente nulo, é um corpo com as operações de soma e produto de funções. O corpo $\mathbb{Q}(t)$ pode ser ordenado, chamando-se uma fração $r(t)$ positiva, quando, no polinômio $p(t)q(t)$, o termo de mais alto grau for positivo.

Neste corpo a unidade é a função constante 1, logo $\mathbb{N}$ corresponde a todas as funções de valor constante natural.

O polinômio $p(t) = t$ é uma fração com denominador 1 e portanto, pertence a $\mathbb{Q}(t)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ o coeficiente do termo de mais alto grau de $t - n$ é positivo ($= 1$), logo $t - n$ é positivo, ou seja, $n < t$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Isto significa que $p(t) = t$ é uma cota superior para $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Q}(t)$. Neste corpo, portanto, $\mathbb{N}$ é limitado superiormente: <u>$\mathbb{Q}(t)$ não é um corpo arquimediano</u>. ◁

2.4 Corpos Ordenados Completos

Falta considerar uma última propriedade de corpos: a propriedade de completude.

Definição 2.8. Um corpo ordenado K é dito completo se todo subconjunto não vazio $X \subseteq K$, que seja limitado superiormente, possui supremo em K. $\triangleleft$

Resulta da definição que, num corpo ordenado completo, todo conjunto não-vazio, limitado inferiormente, $Y \subseteq K$, possui um ínfimo. Com efeito, dado Y, seja $X = -Y$, isto é $X = \{-y;\ y \in Y\}$. Então X é não-vazio e limitado superiormente, logo existe $a = supX$. Logo, facilmente, tem-se que $-a = infY$.

Vejamos no exemplo abaixo que o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ não é completo. Para ver isso vamos lembrar que não existe um número racional $q > 0$ tal que $q^2 = 2$.

Exemplo 2.9. Trabalhando no corpo ordenado $\mathbb{Q}$ dos racionais, consideremos o subconjunto $C = \{x \in \mathbb{Q} \ :\ x > 0, x^2 < 2\}$: temos que $C \subset [0, 2]$, logo C é um conjunto limitado de números racionais. Mostraremos que C não possui supremo.

- Sejam $x \in C$ e $r < 1$, tais que $0 < r < (2 - x^2)/(2x + 1)$. Afirmamos que $x + r$ ainda pertence a C. De $r < 1$ tem-se que $r^2 < r$. Da desigualdade, tem-se que $r(2x + 1) < (2 - x^2)$. Segue que $(x + r)^2 = x^2 + 2xr + r^2 < x^2 + 2xr + r = x^2 + r(2x + 1) < x^2 + 2 - x^2 = 2$. Assim, para qualquer $x \in C$, existe um valor maior $x + r \in C$. Logo o máximo de C não existe.

- De forma parecida, podemos provar que não existe o mínimo do conjunto (limitado inferiormente) $D = \{y \in \mathbb{Q} \ :\ y > 0, y^2 > 2\}$.

- Observamos também que $x < y$ para quaisquer $x \in C$ e $y \in D$, de fato, se fosse $x \geq y > 0$ valeria $x^2 \geq y^2$ contradizendo a definição dos conjuntos. Isso significa que todos os elementos $y \in D$ são cotas superiores de C.

  Vice-versa, toda cota superior de C é elemento de D: se $w \geq x$ para todo $x \in C$ então $w^2 \geq 2$ (pois se fosse menor então $w \in C$ e vimos que C não possui máximo), mas como $w^2 = 2$ não tem solução em $\mathbb{Q}$, temos que $w^2 > 2$ e logo $w \in D$.

- Concluímos que D é o conjunto das cotas superiores de C e logo não existe a menor cota superior, ou seja C não possui supremo em $\mathbb{Q}$, o que implica que $\mathbb{Q}$ não é um corpo completo. $\triangleleft$

Observação 2.10 (Existência de $\sqrt{2}$)**.** O argumento do exemplo anterior mostra que se existir um corpo ordenado completo K então existirá neste corpo um elemento $a > 0$ cujo quadrado é 2. De fato vimos que tal K deve conter $\mathbb{Q}$, logo contém também C e D e nele existirá $a = supC$, mas vimos que $a^2 \geq 2$ por ser a uma cota superior de C, mas por um raciocínio análogo $a^2 \leq 2$ ou a seria um elemento de D logo não seria a menor das cotas superiores. $\triangleleft$

A partir daqui assumiremos o seguinte

Axioma 2.11. *Existe um corpo ordenado completo.* ◁

Chamaremos este corpo de corpo dos números reais e o indicaremos por $\mathbb{R}$.

Observação 2.12. Na verdade, é possível construir um corpo ordenado e completo de várias formas, mas não vamos fazer isso neste texto, assim nos contentamos apenas de assumir sua existência. ◁

Examinaremos agora alguma das propriedades de $\mathbb{R}$, oriundas do fato de ser completo.

Como foi visto na observação 2.10, existe em $\mathbb{R}$ um número positivo a tal que $a^2 = 2$. Este número é indicado por $\sqrt{2}$. De forma análoga podemos afirmar que existe em $\mathbb{R}$ a solução $x > 0$ de todas as equações da forma $x^n = b$ com $n \in \mathbb{N}$ e $b > 0$: tal x é indicado por $\sqrt[n]{b}$.

Além disso, $\mathbb{R}$ é arquimediano: se $\mathbb{N}$ fosse limitado em $\mathbb{R}$ então existiria $c = sup\mathbb{N}$, mas então $c-1$ não seria cota superior logo existiria $n \in \mathbb{N}$: $c-1 < n$ implicando $c < n+1 \in \mathbb{N}$ que é uma contradição.

Observação 2.13. De fato quanto dito acima mostra que um corpo ordenado completo é sempre arquimediano.

Considerando o exemplo do corpo ordenado $\mathbb{Q}(t)$ do exemplo 2.7, nele temos que apesar de $\mathbb{N}$ ser limitado, não vai poder existir $sup\mathbb{N}$. ◁

Observação 2.14. No Axioma 2.11 assumimos a existência de um corpo ordenado e completo. Na verdade pode ser provado que existe apenas um corpo ordenado e completo, no seguinte sentido.

Sejam K e H corpos ordenados e completos: vimos que em cada um deles pode ser identificado um conjunto que corresponde a $\mathbb{Q}$, ou seja, existe um isomorfismo de corpos (bijeção que preserva as propriedades do corpo) entre $\mathbb{Q}_K \subseteq K$ e $\mathbb{Q}_H \subseteq H$. Agora, dado $x \in K$, podemos definir o conjunto X_K de todos os racionais em $\mathbb{Q}_K$ menores que x; aplicando o isomorfismo obtemos então um conjunto X_H em $\mathbb{Q}_H$ limitado superiormente, cujo supremo identificará univocamente um $y \in H$: esta correspondência $x \mapsto y$ definirá então um isomorfismo de corpos entre K e H. ◁

3 Espaços métricos

Dado um conjunto M, chamamos métrica[3] em M uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que associa a cada par de pontos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado distância de x a y, de tal modo que:

- $d(x, y) = 0$ se $x = y$ e $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,

[3]Estamos seguindo para esta parte a referência [LIM76].

- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ quaisquer que sejam $x, y, z \in M$; esta propriedade é chamada *desigualdade triangular*, pois exprime que cada lado de um triângulo não excede a soma dos outros dois lados.

Um espaço métrico é um par (M, d) formado por um conjunto M e uma métrica d em M.

Exemplo 3.1.

- O conjunto dos reais $\mathbb{R}$ pode ser dotado da métrica $d(x,y) = |x-y|$, obtendo o espaço métrico chamado "reta real euclidiana", ou simplesmente "reta".

- Temos também os "espaços euclidianos" $\mathbb{R}^n$, definidos tomando o conjunto $\mathbb{R}^n$ com a métrica $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x_1^2 - y_1^2)^2 + ... + (x_n^2 - y_n^2)^2}$.
Para $n = 2$ é usado o nome de "plano euclidiano".

- Em um conjunto X qualquer podemos tomar uma métrica (que chamaremos métrica discreta) definindo $d(x,y) = 1$ para quaisquer $x \neq y$. $\triangleleft$

Sempre que tivermos um conjunto M com uma distância d (espaço métrico) podemos definir bola de raio r e centro x, sendo $x \in M$ e $r > 0$, como

$$B_r(x) = \{y \in M : \ d(x,y) < r\}.$$

Em seguida, podemos definir conjunto aberto: se $A \subseteq M$, dizemos que A é aberto se

$$\text{para todo } x \in A \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } B_r(x) \subseteq A. \tag{3.1}$$

Percebemos facilmente que

- M e $\emptyset$ são abertos,

- a reunião de qualquer família de abertos é um aberto,

- a interseção de dois abertos é um aberto.

Observação 3.2. Note que não é verdade que a interseção de qualquer família de abertos é aberta, por exemplo no espaço euclidiano, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{\frac{1}{n}}(x) = \{x\}$, que não é um aberto. $\triangleleft$

Observação 3.3. Abertos e bolas podem ter aspectos diferentes dependendo da métrica escolhida. Por exemplo, tomando a métrica discreta em $\mathbb{R}$, as bolas abertas de raio $r \leq 1$ contêm apenas o centro, enquanto as de raio $r > 1$ são $\mathbb{R}$ inteiro. Isso significa que qualquer conjunto resulta aberto pela definição (3.1), já que se $x \in A$ então $x \in B_{1/2}(x) = \{x\} \subseteq A$. $\triangleleft$

Algumas definições conhecidas do cálculo, usualmente expressadas via norma ou distância, podem ser reformuladas usando a noção de abertos: por exemplo, dados (M, d), (N, t) espaços métricos e $f : M \to N$, dizemos que f é contínua em $p \in M$ se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que se } x \in M \text{ e } d(x, p) < \delta \text{ então } t(f(x), f(p)) < \varepsilon;$$

isso equivale a dizer

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que se } x \in B_\delta(p) \text{ então } f(x) \in B_\varepsilon(f(p)), \text{ ou seja, } f(B_\delta(p)) \subseteq B_\varepsilon(f(p)).$$

Dizemos que f é contínua se for contínua em cada ponto p de M.

Neste teorema vemos que este conceito pode ser expressado apenas falando em abertos.

Teorema 3.4. *Sejam M, N espaços métricos. Seja f uma aplicação de M em N. Para que f seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(A') := \{x \in M : f(x) \in A'\}$ de todo subconjunto aberto $A' \subseteq N$ seja um subconjunto aberto de M.*

Demonstração. Se f é contínua e $A = f^{-1}(A')$ com $A' \subseteq N$ aberto, então para todo $a \in A$, $f(a) \in A'$ e logo existe um $\epsilon > 0$, tal que $B_\epsilon(f(a)) \subseteq A'$. Pela continuidade da f, $\exists \delta$ tal que $f(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a)) \subseteq A'$, logo $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(A') = A$. Logo A é um aberto.

Viceversa, dados $p \in M$ e $\varepsilon > 0$, como $B_\varepsilon(f(p))$ é um aberto e $p \in A := f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$, como A deve ser um aberto, existirá $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) \subseteq A$, logo $x \in B_\delta(p)$ implica $f(x) \in B_\varepsilon(f(p))$. □

4 Espaços topológicos

Neste trabalho, precisaremos lidar com espaços nos quais não poderá ser definida uma distância, mas queremos poder definir limites, continuidade e outras propriedades deste tipo.

Por este motivo é útil a noção de **Espaço Topológico**[4]:

Definição 4.1. Definimos Espaço Topológico um par (X, τ), em que X é um conjunto e τ representa uma coleção de subconjuntos de X, que possua as mesmas propriedades da coleção dos abertos em espaços métricos, ou seja

- $X, \emptyset \in \tau$,
- a reunião de qualquer família de elementos de τ, é também elemento de τ,
- a interseção de dois elementos de τ, é também elemento de τ.

Chamaremos τ de topologia e seus elementos de "abertos". ◁

[4] Estamos seguindo para esta parte a referência [LIM76].

Em vista do Teorema 3.4, dados dois espaços topológicos (X, τ_X) e (Y, τ_Y), diremos que uma função $f : X \to Y$ é contínua, quando a pre-imagem $f^{-1}(A')$ de todo aberto de Y for um aberto de X, ou seja, deve valer $f^{-1}(A') \in \tau_x$ para todo $A' \in \tau_Y$.

Com esta definição é fácil ver que a composta $g \circ f : X \to Z$ de duas aplicações contínuas $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ é uma aplicação contínua.

Vejamos a seguir algumas propriedades dos espaços topológicos.

Definição 4.2. Diz-se que um espaço topológico (X, τ) é metrizável, quando é possível definir uma métrica d em X tal que os abertos definidos por d, de acordo com a definição dada anteriormente em (3.1), coincidam com os abertos da topologia τ. $\lhd$

Definição 4.3. Diz-se que um espaço topológico (X, τ_X) é um espaço de Hausdorff (ou espaço separado), quando para quaisquer $x, y \in X$ distintos exitem dois abertos $A, B \in \tau_X$ tais que $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$. $\lhd$

Propriedade 4.4. Todo espaço topológico metrizável é espaço de Hausdorff. $\lhd$

Demonstração. Seja d uma métrica para o espaço X; se $\delta < d(x, y)/2$ então os conjuntos $B_\delta(x)$ e $B_\delta(y)$ são dois abertos contendo x e y respectivamente. Se existe um ponto $z \in B_\delta(x) \cap B_\delta(y)$, então $d(x, z) < \delta$ e $d(y, z) < \delta$. Logo, pela desigualdade triangular $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < 2\delta$, ou seja, $\delta > \frac{d(x,y)}{2}$, o que é uma contradição. Logo $B_\delta(x) \cap B_\delta(y) = \emptyset$. $\square$

Usando a Propriedade acima veremos, nos exemplos 4.6 e 4.7, que nem todo espaço topológico é metrizável.
Entretanto, a recíproca da Propriedade 4.4 não é verdadeira: existem espaços de Hausdorff não metrizáveis (veja o Exemplo 4.8).

Vejamos alguns exemplos de espaços topológicos.

Exemplo 4.5. Seja X um conjunto qualquer.

- Podemos definir uma topologia τ_0 em X, tomando todos os subconjuntos de X como abertos τ_0 chama-se topologia discreta.

  Nota-se que (X, τ_0) é metrizável, uma vez que, como vimos na Observação 3.3, esta é a topologia que resulta tomando em X a métrica discreta.

  Logo (X, τ_0) é *metrizável e de Hausdorff.*

- Podemos definir uma topologia τ_1 em X, na qual os únicos abertos são o conjunto X e o conjunto vazio $\emptyset$; τ_1 chama-se topologia caótica. Note que, no caso em que (X, τ_1) possua pelo menos dois pontos, ele não será de Hausdorff, logo não será metrizável; de fato, se $x \neq y$ são dois pontos em X, o único aberto que contém x é o próprio X, que logo contém y também. Por consequência, se tomarmos uma métrica d qualquer em X, os abertos definidos pela métrica não coincidirão com os abertos da topologia τ_1. $\lhd$

Exemplo 4.6. Seja X um conjunto infinito. Consideremos a coleção τ_{cf} formada pelo conjunto vazio $\emptyset$ junto com todos os complementares dos subconjuntos finitos de X. Neste caso τ_{cf} é uma topologia, chamada 'topologia do complementar finito', ou <u>topologia co-finita</u>.

Demonstração. Têm-se que $\emptyset \in \tau$, assim como $X \in \tau$, uma vez que X é complementar do conjunto vazio, e este, por sua vez, é finito. Tomemos agora um família de conjuntos não vazios $(A_i)_{i\in I}$ de τ, onde I é um conjunto arbitrário de índices. Dessa forma, para cada $i \in I$, existe um conjunto finito B_i tal que $A_i = X\backslash B_i$. Temos então que:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(X\backslash B_i) = X\backslash \bigcap_{i\in I} B_i$$

e como a interseção arbitrária de conjuntos finitos é um conjunto finito, $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \tau$. Agora suponha que $I = \{1, 2, 3, ...n\}$ seja um conjunto finito em $\mathbb{N}$. Disso temos:

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} X\backslash B_i = X\backslash \bigcup_{i\in I} B_i\,,$$

portanto, $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \in \tau$, dado que a união finita de conjuntos finitos é um conjunto finito. □

Vamos mostrar que (X, τ_{cf}) não é Hausdorff e logo *não é metrizável.* Tomando dois pontos distintos $x, y \in X$, sejam $A, B \in \tau_{cf}$ tais que $x \in A,\ y \in B$. Como seus complementares $X\backslash A$ e $X\backslash B$ são finitos, temos que o complementar da interseção deles

$$X\backslash(A \cap B) = (X\backslash A) \cup (X\backslash B)$$

é também finito, e portanto, distinto de X. Logo, $A \cap B \neq \emptyset$. $\triangleleft$

Exemplo 4.7. Seja X um conjunto não enumerável. Consideremos a coleção τ_{cc} formada pelo conjunto vazio $\emptyset$ e pelos subconjuntos de X cujo complementar é enumerável. Neste caso τ_{cc} é uma topologia, dita <u>topologia co-contável</u>.

Considerando o fato que, como para conjuntos finitos, a interseção de qualquer família de contáveis é contável e a reunião de dois contáveis é contável, podemos repetir todos os raciocínios do exemplo anterior, mostrando que τ_{cc} é realmente uma topologia e que (X, τ_{cc}) não é Hausdorff e logo *não é metrizável.* $\triangleleft$

Exemplo 4.8. A reta de Sorgenfrey, é um espaço topológico (X, τ), onde $X = \mathbb{R}$ e τ é definida dizendo que são abertos os conjuntos A tais que, para todo $x \in A$, existe $r > 0$ tal que $[x, x + r) \subseteq A$.

É fácil ver que o espaço é Hausdorff: tomando dois pontos arbitrários $x < y$, temos $x \in [x, (x + y)/2)$ e $y \in [y, y + 1)$ onde os dois conjuntos são abertos e disjuntos.

Porém este espaço não é metrizável (mas a prova disso envolve conceitos mais avançados e não apresentamos aqui). $\triangleleft$

4.1 Redes

Nesta seção introduziremos o conceito de rede[5], como forma de estudar as propriedades de um espaço topológico.

Definição 4.9. Seja D um conjunto, e seja $\trianglelefteq$ uma relação em D que satisfaz as seguintes propriedades:

- $\trianglelefteq$ é reflexiva: para qualquer $x \in D$, $x \trianglelefteq x$.
- $\trianglelefteq$ é transitiva: para qualquer $a, b, c \in D$, se $a \trianglelefteq b$ e $b \trianglelefteq c$ então $a \trianglelefteq c$.
- $\trianglelefteq$ é direcionada: para qualquer $a, b \in D$, existe um elemento $c \in D$ tal que $a \trianglelefteq c$ e $b \trianglelefteq c$.

Um par $(D, \trianglelefteq)$ que satisfaça as três propriedades é chamado de conjunto direcionado. $\triangleleft$

Exemplo 4.10. Alguns exemplos de conjuntos direcionados são:

- $D = \mathbb{N}$ com sua relação $\trianglelefteq$ sendo a usual de ordenação $\leq$;
- $D = \tau$ (uma topologia em algum conjunto X) com a relação $\trianglelefteq$ sendo a inclusão $\subseteq$, ou também sendo a relação inversa $\supseteq$ (note que $\emptyset$ é contido em qualquer conjunto!).

  Com estas mesmas relações podemos considerar também os conjuntos direcionados

  - $D_x = \{U \in \tau : x \in U\}$: os conjuntos da topologia que contêm um ponto x fixado (ditos *vizinhanças de* x);
  - $D = \{\{n, n+1, n+2, ...\} \subseteq \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$. $\triangleleft$

Definição 4.11. Uma rede (net em inglês) em um conjunto X é um mapa $w : D \to X$, sendo D um conjunto direcionado. $\triangleleft$

Definição 4.12. Se (X, τ) é um espaço topológico e $w : D \to X$ é uma rede, dizemos que w converge a $x \in X$ (escrevendo $w \to x$ ou $\lim w = x$), se para qualquer aberto U contendo x, existe um $d \in D$ tal que $w(e) \in U$ para todo $e \trianglerighteq d$.
Quando isso acontecer, diremos que w está *definitivamente* em U.
Chamamos o conjunto da forma $T_d = \{w(e) : \ e \trianglerighteq d\}$ uma *cauda da rede* w. $\triangleleft$

Observação 4.13. Note que, uma sequência é uma rede, já que $(\mathbb{N}, \leq)$ é um conjunto direcionado, e a normal definição de convergência para sequência coincide com a dada acima. $\triangleleft$

Observação 4.14. Uma consequência da propriedade de um espaço ser Hausdorff é que os limites nele serão sempre únicos: de fato se uma rede $w \to x$ e $y \neq x$, se existirem duas vizinhanças disjuntas $U_x \ni x$ e $U_y \ni y$ e w está definitivamente em U_x, estará definitivamente no complementar de U_y, logo $w \not\to y$. $\triangleleft$

[5] Estamos seguindo para esta parte a referência [Kha].

Observação 4.15. Uma consequência da propriedade de um espaço ser Hausdorff é que os limites nele serão sempre únicos: de fato, se uma rede $w \to x$ e também $w \to y$ sendo $y \neq x$, teremos então duas vizinhanças disjuntas $U_x \ni x$ e $U_y \ni y$, onde w está definitivamente em U_x e também em U_y. Mas isso não é possível pela propriedade da relação $\trianglelefteq$ ser direcionada: de fato se $w(e) \in U_x$ para $e \trianglerighteq a$ e $w(e) \in U_y$ para $e \trianglerighteq b$, então tomando $c \trianglerighteq a, b$ temos que $w(e) \in U_x \cap U_y = \emptyset$ para $e \trianglerighteq c$, uma contradição. $\triangleleft$

4.2 Aplicações do conceito de rede

Vejamos a seguir algumas propriedades topológicas e como elas podem ser caracterizadas usando redes.

Definição 4.16. Seja S um subconjunto do espaço topológico X. Um ponto $x \in X$ diz-se aderente a S quando toda vizinhança de x em X contém pelo menos um ponto de S. O conjunto dos pontos de X que são aderentes a S chama-se fecho de S e indica-se como $\overline{S}$. Assim, $x \in \overline{S}$ se, e somente se, para todo aberto A do espaço X, $x \in A$ implica $A \cap S \neq \emptyset$. $\triangleleft$

Exemplo 4.17. Considere em $\mathbb{R}$ o conjunto $S = [0, 1]$ e o conjunto $T = \{x_n = 1/n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Sabemos que com a topologia induzida pela métrica euclidiana $\overline{S} = S$ e $\overline{T} = T \cup \{0\}$.

Mostremos que com a topologia τ_{cc} temos que $\overline{S} = \mathbb{R}$, enquanto $\overline{T} = T$ (em particular, 0 não é ponto aderente de T).

De fato, dado $x \in \mathbb{R}$ temos que para cada $U \in \tau_{cc}$ tal que $x \in U$, $U \cap [0, 1] \neq \emptyset$: isso vale porque $\mathbb{R} \setminus U$ é contável, logo não pode conter o segmento $[0, 1]$ inteiro.

Por outro lado, $A = T^c \in \tau_{cc}$, já que T é enumerável, mas A é disjunto de S, logo para qualquer $x \in A$ podemos dizer que $x \notin \overline{T}$. $\triangleleft$

No Teorema abaixo mostramos que a propriedade de ser ponto aderente pode ser caracterizada usando redes.

Teorema 4.18. *Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $S \subseteq X$. Então $x \in \overline{S}$ se e somente se existe uma rede $w : D \to S$ tal que $w \to x$.*

Demonstração. Seja $w : D \to S$ uma rede tal que $w \to x$. Queremos mostrar que $x \in \overline{S}$. Fixado um aberto $U \ni x$, pela definição da convergência da rede, existe um $d \in D$ tal que $w(e) \in U$ para todo $e \trianglerighteq d$. Já que $w(e) \in S$ para todo $e \in D$, a interseção $S \cap U$ não pode ser vazia.

Suponha que $x \in \overline{S}$. Precisamos mostrar que existe uma rede w que convirja a x. Para isso precisamos definir um conjunto direcionado para ser o domínio da nossa rede: tomaremos o conjunto de vizinhanças de x, $D_x = \{U \in \tau : x \in U\}$, direcionado dizendo que $U \trianglelefteq V$ se e somente se $U \supseteq V$.
Pela definição de $\overline{S}$, para todo $U \in D_x$ podemos fixar um ponto $x_U \in U \cap S$. Definimos então $w : D_x \to S$ por $w(U) = x_U$. Então w é uma rede, e temos $w \to x$. De fato, fixe

um aberto U contendo x. Então $U \in D_x$ e para todo $V \in D_x :\ U \trianglelefteq V$ (ou seja, $V \subseteq U$), teremos:

$$w(V) = x_V \in V \cap S \subseteq U \cap S \subseteq U.$$

Isso mostra que a cauda $T_U = \{w(V) : U \trianglelefteq V\} = \{w(V) : V \subseteq U\}$ da rede é contida em U, como requerido. $\square$

Se trocarmos redes por sequências, o Teorema 4.18 apenas seria válido em espaços métricos (ou metrizáveis).

Teorema 4.19. *Seja (X, d) um espaço métrico e seja $S \subseteq X$. Então $x \in \overline{S}$ se e somente se existe uma sequência x_n em S tal que $x_n \to x$.*

Demonstração. Se existir uma sequência x_n em S tal que $x_n \to x$ então $x \in \overline{S}$ pelo Teorema 4.18, já que uma sequência é também uma rede.

Vice-versa suponha que $x \in \overline{S}$. Precisamos mostrar que existe uma sequência x_n que convirja a x.
Pela definição de $\overline{S}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos fixar um ponto $x_n \in B_{1/n}(x) \cap S$. Então x_n é uma sequência e $x_n \to x$ já que $d(x, x_n) < 1/n$.

$\square$

Exemplo 4.20. Para mostrar que o Teorema 4.19 seria falso em espaços topológicos não metrizáveis, considere o conjunto $S = [0, 1]$ em $(\mathbb{R}, \tau_{cc})$.

Vimos no Exemplo 4.17 que $\overline{S} = \mathbb{R}$: como afirmado no teorema 4.18 podemos de fato construir uma rede de pontos de $[0, 1]$ que converge a x: basta construir w associando a cada $U \in D_x$ um qualquer ponto de $U \cap [0, 1] \neq \emptyset$.

Porém, nenhuma sequência x_n de pontos de $[0, 1]$ pode tender a x se $x \notin [0, 1]$: neste caso o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{x_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ seria uma vizinhança de x mas não contém pontos da sequência. $\triangleleft$

Os exemplos a seguir mostrarão outras propriedades topológicas que podem ser caracterizadas usando redes, enquanto o conceito mais simples e usual de sequência pode não ser suficiente para caracterizá-las.

Exemplo 4.21. Vamos mostrar que tanto na topologia co-contável quanto na topologia discreta, se uma sequência $x_n \to x$ então $x_n = x$ para n grande.

Para a topologia discreta isso é imediato, já que $\{x\}$ é um aberto e logo $x_n \to x$ implica $x_n \in \{x\}$ para n grande.

Para a topologia co-contável, seja $A := (Im\{x_n\})^c \cup \{x\}$; como $A^c = Im\{x_n\} \cap \{x\}^c$ é contável, então A é aberto em τ_{cc} e contém x. Porém, x_n não está em A, a menos que $x_n = x$, logo devemos ter $x_n = x$ para n grande.

Este exemplo mostra que as sequências não conseguem enxergar a diferença entre as duas topologias. $\triangleleft$

Exemplo 4.22. Com a topologia discreta, o resultado do exemplo acima vale também para redes: se uma rede $w \to x$ então $w = x$ definitivamente: a prova é análoga já que $\{x\}$ é um aberto.

Pelo contrário, isso não é mais verdade para a topologia co-contável, mostrando que redes conseguem sim enxergar as diferentes topologias.

Para ver isso consideremos a coleção $D_x := \{U \in \tau_{cc} : x \in U\}$ das vizinhanças de x, que como vimos é um conjunto direcionado com a relação $\trianglelefteq := \supseteq$: definimos então a rede $w : D_x \to A$ tomando $w(U) \in U \setminus \{x\}$ para todo $U \in D_x$, o que é possível já que U contém muitos pontos. Desta forma, $w \to x$ já que fixado $U \in D_x$, $w(U) \in U$ e $w(V) \in V \subseteq U$ para todo $V \trianglerighteq U$. $\triangleleft$

Exemplo 4.23. Usando os exemplos acima, mostraremos um caso em que, em espaços topológicos não metrizáveis, não podemos caracterizar a continuidade de uma função usando apenas sequências, mas podemos usando redes.

Em particular, vamos mostrar uma situação em que $f(x_n) \to f(x)$ para toda sequência $x_n \to x$, mas f não é contínua em x, por outro lado, vai existir uma rede $w \to x$ tal que $f(w) \not\to f(x)$.

Seja $f : (X, \tau_{cc}) \to (X, \tau_0) : x \mapsto x$ sendo X não enumerável.

Como vimos, se a sequência $x_n \to x$ (na topologia τ_{cc}) então $x_n = x$ definitivamente, logo $f(x_n) = f(x)$ definitivamente, ou seja $f(x_n) \to f(x)$ (na topologia τ_0).

Porém f não é contínua, pois os conjuntos da forma $\{x\}$ são abertos de τ_0, mas $f^{-1}(\{x\}) = \{x\}$ não é aberto de τ_{cc}.

Uma rede $w \to x$ pela qual não vale $f(w) \to f(x)$ é a mesma w do exemplo 4.22, de fato temos $f(w(U)) \neq f(x)$ para todo $U \in D_x$, logo não pode ser que $f(w) \to f(x)$ pela topologia τ_0. $\triangleleft$

4.3 Filtros

Introduziremos agora o conceito de filtro[6], que também fornece uma forma de estudar as propriedades de um espaço topológico.

Definição 4.24. Seja X um conjunto. Uma coleção não-vazia $F \subset \mathcal{P}(X)$[7] é chamada de filtro em X se as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. $\emptyset \notin F$;
2. F é fechado superiormente: se $A \in F$ e $A \subset B$, então $B \in F$;
3. F é fechado sob interseções finitas: se $A, B \in F$ então $A \cap B \in F$.

Um filtro em X é chamado ultra-filtro se for maximal, ou seja, se não existe nenhum filtro em X que o contenha.

Um subconjunto F' de um filtro F que seja também um filtro é chamado subfiltro de F. $\triangleleft$

[6] Estamos seguindo para esta parte a referência [Kha]

[7] A notação $\mathcal{P}(X)$ indica a coleção de todos os subconjuntos do conjunto X.

Nota-se que algumas propriedades são obtidas a partir da própria definição de filtro, tais como:

i) De 1. e 3. temos que $A \in F$ implica $A^c \notin F$, pois em caso contrário $A \cap A^C = \emptyset \in F$.

ii) Por 2, temos que $X \in F$, sempre que F for um filtro em X.

Exemplo 4.25. A seguir alguns exemplos de filtros.

- Dado um conjunto não-vazio X, $F = \{X\}$ é um filtro em X.

- Se (X, τ) é um espaço topológico e $x \in X$, a coleção: $F_x = \{A \subseteq X : \exists U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq A\}$ é um filtro em X, chamado filtro de vizinhanças de x.

- A coleção $U_x = \{A \subseteq X : x \in A\}$ é um ultra-filtro em X. Ultra-filtros dessa forma são chamados ultra-filtros principais.

  Para ver que é um ultra-filtro, precisa passar pelo Teorema 4.30, notando que para qualquer $A \subseteq X$, vale que A ou A^C está em U_x (pois um e apenas um dos dois contém x).

- Se X é um conjunto infinito, a coleção $F = \{A \subseteq X : X/A$ é finito$\}$ dos conjuntos co-finitos de X, é um filtro, geralmente chamado Filtro de Fréchet.

  Uma propriedade importante do Filtro de Fréchet em um conjunto infinito é que qualquer outro filtro contendo-o (ultra-filtros, em particular), não pode conter conjuntos finitos (ou conteria ele e seu complementar). $\triangleleft$

Definição 4.26. Seja (X, τ) um espaço topológico, F um filtro em X e seja $x \in X$. Então F é dito convergir para x se $F_x \subseteq F$ (F contém o filtro de vizinhanças de x). Neste caso escrevemos $F \to x$. $\triangleleft$

Uma maneira intuitiva de pensar sobre esta definição é que F converge para x, se F contém todas as vizinhanças de x: de fato, isto é equivalente a $F_x \subseteq F$, uma vez que F é fechado superiormente.

Observação 4.27. Se o espaço topológico for espaço de Hausdorff, então um filtro pode convergir apenas para um ponto único, já que para dois pontos distintos $x, y \in X$, se U_x e U_y são vizinhanças disjuntas de x e de y respectivamente, então não podem ambas pertencer a um mesmo filtro. $\triangleleft$

4.4 Ultra-filtros

Mais a frente precisaremos trabalhar com ultra-filtros. Veremos agora suas propriedades e como podemos obter um.

Definição 4.28. A coleção $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ é dita possuir a propriedade de interseção finita se qualquer interseção de um número finito de membros de S é não-vazia, isto é para todo $A_1, A_2, ..., A_n \in S$, vale $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \neq \emptyset$.

A propriedade acima é importante para gerar filtros, como mostra o seguinte resultado.

Proposição 4.29. *Se uma coleção S possui a propriedade de interseção finita, então existe um único menor filtro que contém S.*

Demonstração. Definiremos um filtro F da forma $F = \{B : \exists\, A_1, .., A_n \in S : \; A_1 \cap ... \cap A_n \subseteq B\}$.

Primeiro mostraremos que $\emptyset \notin F$. Suponha que $\emptyset \in F$, então, para algum $j \in \mathbb{N}$, $A_1 \cap ... \cap A_j \subseteq \emptyset$ o que implica que $A_1 \cap ... \cap A_j = \emptyset$, o que é uma contradição da propriedade. Então $\emptyset \notin F$.

Mostraremos então, que F é fechado superiormente. Para isso, se $A \in F$ e $A \subseteq B$, então existe um j tal que $A_1 \cap ... \cap A_j \subseteq A$. Como $A \subseteq B$, então $A_1 \cap ... A_j \subseteq B$, logo $B \in F$.

Finalmente, mostraremos que F é fechado sob interseções finitas. Se $A, B \in F$, existem m e n, tais que $A_1 \cap ... \cap A_m \subseteq A$ e $B_1 \cap ... \cap B_n \subseteq B$. Então $A \cap B \supseteq (A_1 \cap ... \cap A_m) \cap (B_1 \cap ... \cap B_n)$, o que implica que $A \cap B \in F$.

Isso mostra que F é um filtro, e é o menor possível que contém S, já que por definição de filtro deve conter pelo menos as interseções finitas e os superconjuntos de seus elementos.

□

A este ponto podemos mostrar a seguinte caracterização de ultra-filtros.

Teorema 4.30. *Seja X um conjunto e F um filtro em X. Então F é um ultra-filtro se e somente se para qualquer subconjunto $A \subseteq X$, ou $A \in F$ ou $A^C \in F$.*

Demonstração. $\Longrightarrow$ Seja U um ultra-filtro em X e suponha que A é um subconjunto não-vazio de X tal que $A \notin U$. Queremos mostrar que $A^C \in U$.

Pela maximalidade de U, temos que $U \cup \{A\}$ não é um filtro e também não possui a propriedade de interseção finita (se possuísse, geraria um filtro que contém U, o que iria contradizer a maximalidade). Como U é filtro, isso significa que existe um $B \in U$ tal que $A \cap B = \emptyset$. Mas então $B \subseteq A^C$ e logo $A^C \in U$ já que U é fechado superiormente.

$\Longleftarrow$ Se para qualquer subconjunto $A \subseteq X$, ou $A \in F$ ou $A^C \in F$, então nenhum conjunto pode ser adicionado ao filtro F, ou seria o complementar de um elemento de F implicando que $\emptyset \in F$, e logo F não seria um filtro.

□

Corolário 4.31. *Mais em geral, se U é um ultra-filtro em X e $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ é reunião disjunta de um número finito de conjuntos A_i, então um e apenas um deles pertence a U.*

Demonstração. Apenas um dos conjuntos pode pertencer a U pois já vimos que nenhum filtro pode conter dois conjuntos disjuntos.

Por outro lado, se $A_i \notin U$ para todo i, então $A_i^c \in U$ para todo i, e logo também $\emptyset = X^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \in U$, o que é uma contradição.

□

Outra propriedade importante, cuja prova envolve o Axioma da Escolha na forma do Lema de Zorn, é a seguinte:

Teorema 4.32. *Todo filtro em X pode ser estendido a um ultra-filtro em X.*

Um ultra-filtro cujos elementos são todos conjuntos infinitos é dito ultra-filtro livre. Usando o Teorema acima podemos provar o seguinte.

Teorema 4.33. *Para todo conjunto infinito X, existe um ultra-filtro livre em X.*

Demonstração. Podemos tomar o Filtro de Fréchet F em X e aplicar o Teorema 4.32, para obter um ultra-filtro U contendo F. Necessariamente U é livre pois se A for finito então $A^c \in F \subseteq U$ e logo $A \notin U$ □

4.5 Conexão entre redes e filtros

Nesta seção veremos como relacionar redes e filtros, o que permite traduzir uma caracterização dada usando redes em uma dada usando filtros, e vice-versa.

Definição 4.34. Seja F um filtro em X. Podemos tornar F um conjunto direcionado tomando $A_1 \trianglelefteq A_2$, se e somente se $A_1 \supseteq A_2$. De fato, dados $A_1, A_2 \in F$ sabemos que $A_1 \cap A_2 \in F$, o qual é contido em ambos os conjuntos.
Chamamos rede derivada de F, uma qualquer rede $w : F \to X$ de domínio F que possua a propriedade $w(A) \in A$ para todo $A \in F$. ◁

Note que as redes derivadas não são únicas, já que em geral $w(A)$ pode ser escolhido de diferentes maneiras.

Definição 4.35. Seja D um conjunto direcionado e seja $w : D \in X$ uma rede em X. Chamamos filtro derivado de w o filtro

$$F_w = \{A \subseteq X : w \text{ está definitivamente em } A\}.$$

◁

Precisa verificar que realmente F_w é um filtro. Claramente $\emptyset \notin F_w$. Também é claro que F_w é fechado superiormente: se w está definitivamente em A e $A \subset A'$ então w está definitivamente em A'.

Apenas resta mostrar que F_w é fechado sob interseções finitas. Sejam $A_1, A_2 \in F_w$, logo existem caudas T_{d_1} e T_{d_2} de w em A_1 e A_2, respectivamente. Usando o fato de que D é direcionado, seja $e \in D$ tal que $d_1 \trianglelefteq e$ e $d_2 \trianglelefteq e$. Então $T_e \subseteq A_1 \cap A_2$ e então também $A_1 \cap A_2 \in F_w$.

O Teorema a seguir mostra a relação entre convergência de filtros e de redes.

Teorema 4.36. *Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $x \in X$.*

1. *Se $w : D \to X$ é uma rede, então $w \to x$ se e somente se o filtro derivado $F_w \to x$.*

2. *Se F é um filtro de X, então $F \to x$ se e somente se toda rede derivada de F converge para x.*

Demonstração. A afirmação 1 segue apenas comparando as duas definições de convergência: $w \to x$ significa que w está definitivamente em qualquer vizinhança de x, logo F_w contém toda vizinhança de x, e vice-versa.

Prova da afirmação 2. "$\Longrightarrow$". assuma $F \to x$, e seja $w : F \to X$ uma rede derivada de F. Fixado um aberto U contendo x, queremos mostrar que a cauda da rede está em U. Como por hipótese F contém toda vizinhança de x, temos que $U \in F$. Mostraremos que a cauda $T_U \subseteq U$: de fato, dado $V \in F$ com $U \trianglelefteq V$ (isto é, $V \subseteq U$), imediatamente temos que $w(V) \in V \subseteq U$. Então $T_U \subseteq U$ e logo $w \to x$.

"$\Longleftarrow$". Assuma que toda rede derivada $w : F \to X$ converge para x e assuma para contradição que $F \not\to x$. Isso significa que existe alguma vizinhança U de x tal que $U \notin F$ e logo $V \not\subseteq U$ para todo $V \in F$. Podemos então construir uma rede derivada w de F tal que $w(V) \in V \backslash U$ para todo $V \in F$. Então, claramente esta rede derivada não converge para x, contradizendo a suposição que toda rede derivada de F converge para x. $\square$

Graças a este Teorema, podemos por exemplo obter um resultado análogo ao Teorema 4.18 para filtros.

Teorema 4.37. *Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $S \subseteq X$. Então $x \in \overline{S}$ se e somente se existe um filtro F em X tal que $F \to x$.*

Demonstração. Se $x \in \overline{S}$ então existe uma rede w tal que $w \to x$ pelo Teorema 4.18 e logo o filtro derivado $F_w \to x$.

Vice-versa se existe um filtro F em X tal que $F \to x$, então a rede derivada $w \to x$ e logo $x \in \overline{S}$ pelo Teorema 4.18. $\square$

5 Corpos super-reais

Voltaremos agora a considerar corpos ordenados.

Chamaremos corpo super-real[8] um corpo ordenado que contenha $\mathbb{R}$, mas distinto de $\mathbb{R}$.

Vimos que todo corpo ordenado contém uma cópia de $\mathbb{N}$ e de $\mathbb{Q}$. Por outro lado vimos que um corpo é dito não-arquimediano quando existem elementos maiores de qualquer natural.

Usaremos as seguintes definições.

Definição 5.1. Seja K um corpo ordenado e $\delta \in K$. Diz-se que:

- δ é infinitesimal se, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|\delta| < 1/n$;
- δ é finito se existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\delta| < n$;
- δ é infinito se, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|\delta| > n$. $\triangleleft$

[8] Estamos seguindo para esta parte a referência [Ben22].

Em particular, um corpo ordenado K é chamado *não-arquimediano* se contém um número infinito.

Pela definição, pode se notar que todos os infinitesimais são finitos. Além disso, o inverso multiplicativo de um número infinito é um número infinitesimal não-nulo e vice-versa.

Números infinitesimais podem ser utilizados para formalizar uma nova noção de *proximidade.*

Definição 5.2. Diz-se que dois números $\delta, \epsilon \in K$ são infinitamente próximos se $\delta - \epsilon$ é infinitesimal. Neste caso, escreve-se $\delta \sim \epsilon$. $\lhd$

A relação "$\sim$"de infinita proximidade é uma relação de equivalência. Isso implica que podemos particionar K em classes de equivalências, ou seja, uma família de conjuntos a dois a dois disjuntos tais que x, y pertencem ao mesmo conjunto se e só se $x \sim y$.

O teorema a seguir mostra que podemos pôr em correspondência a classe de qualquer finito com um número real.

Teorema 5.3. *Se K é um corpo super-real, então todo número finito $\delta \in K$ é infinitamente próximo a um único número real r. Neste caso, r é chamado de **parte standard** de δ e denotado por $st(\delta)$.*

Demonstração. Dado um número finito $\delta \in K$, define-se:

$$A := \{a \in \mathbb{R} : \ a < \delta\};$$

como $-n < \delta < n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, A é não vazio e limitado superiormente e logo considerando A apenas como subconjunto de $\mathbb{R}$, pela completude de $\mathbb{R}$ existe $c := supA \in \mathbb{R}$. Mostremos que $c \sim \delta$, ou seja, $|c - \delta| < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Fixado $n \in \mathbb{N}$, por definição de supremo temos que $c - \frac{1}{n}$ não é cota superior de A, logo existe $a \in A : \ c - \frac{1}{n} < a(< \delta)$.

Por outro lado, vale $\delta < c + \frac{1}{n}$: se por contradição $\delta \geq c + \frac{1}{n}$ então $c + \frac{1}{2n} \in A$ contradizendo que c seja o $supA$.

A unicidade é consequência do fato que $r \sim s$ com $r, s \in \mathbb{R}$ implica $r = s$. $\square$

Teorema 5.4. *Se K é um corpo super-real então ele é não-arquimediano.*

Demonstração. Tome $\delta \in K/\mathbb{R}$. Se δ é infinito, então K é não-arquimediano por definição. Se δ é finito então $\delta - st(\delta)$ é infinitesimal e não nulo e logo

$$\epsilon := \frac{1}{\delta - st(\delta)}$$

é infinito, então K é não-arquimediano. $\square$

Propriedade 5.5. Sejam δ e ϵ números finitos, então:

1. se $\delta \geq 0$, então $st(\delta) \geq 0$; se $st(\delta) > 0$, então $\delta > 0$;

2. se $\delta \in \mathbb{R}$, então $st(\delta) = \delta$;
3. $\delta \leq \epsilon \Rightarrow st(\delta) \leq st(\epsilon)$;
4. $st(\delta + \epsilon) = st(\delta) + st(\epsilon)$;
5. $st(\delta \cdot \epsilon) = st(\delta) \cdot st(\epsilon)$;
6. se $st(\epsilon) \neq 0$, então $st(\frac{\delta}{\epsilon}) = \frac{st(\delta)}{st(\epsilon)}$. $\lhd$

Demonstração. As provas seguem facilmente da definição.
– Se $st(\delta) > 0$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < st(\delta)$ e como $|st(\delta) - \delta| < \frac{1}{2n_0}$ concluímos que $\delta > \frac{1}{2n_0} > 0$.
Analogamente temos que se $st(\delta) < 0$, então $\delta < 0$, cuja contranominal é: se $\delta \geq 0$, então $st(\delta) \geq 0$.
– Para provar 4 (e 5 analogamente), observe que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|\delta - st(\delta)| < \frac{1}{n}$ e $|\epsilon - st(\epsilon)| < \frac{1}{n}$ implica $|\delta + \epsilon - st(\delta) - st(\epsilon)| < \frac{2}{n}$.
– De 4 segue 3: se $\epsilon - \delta \geq 0$ então $st(\epsilon) - st(\delta) \geq 0$.
– Como se $st(\epsilon) \neq 0$ então ϵ não é infinitesimal e $1/\epsilon$ é finito, vemos que $st(\epsilon)st(1/\epsilon) = 1$ do qual deduzimos 6. $\square$

Definição 5.6. Seja K um corpo não-arquimediano e $\delta \in K$.
– A <u>mônada</u> de δ é o conjunto de todos os números que são infinitamente próximos a ele:

$$mon(\delta) = \{\epsilon \in K : \delta \sim \epsilon\}.$$

– A <u>galáxia</u> de δ é o conjunto de todos os números que são finitamente próximos a ele:

$$gal(\delta) = \{\epsilon \in K : \delta - \epsilon \text{ é finito}\}.$$

$\lhd$

Pela definição, segue que o conjunto dos números infinitesimais é $mon(0)$ e o conjunto dos números finitos é $gal(0)$.

6 Construindo um corpo super-real

Nesta seção mostraremos uma possível construção de um corpo super-real[9]. Começamos considerando um conjunto infinito L e o conjunto $R := \mathcal{F}(L, \mathbb{R})$ de todas as funções a valores reais com domínio L. Indicaremos por $\mathbf{k}_L$ a função contante k e por $\mathbf{k}_A$ a função que vale k em $A \subset L$ e 0 em $L \setminus A$.

Em R podemos definir uma soma e um produto fazendo as operações termo a termo, ou seja,

$$\begin{cases} (\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x) \quad \forall x \in L, \\ (\varphi \cdot \psi)(x) := \varphi(x) \cdot \psi(x) \quad \forall x \in L. \end{cases} \tag{6.1}$$

[9] Estamos seguindo para esta parte a referência [Kei76].

Com estas operações, R possui a estrutura de anel comutativo com identidade, ou seja, ele satisfaz todas as propriedades de corpo vistas na seção 2, exceto a propriedade de existência do elemento inverso da multiplicação. Em particular, os elementos neutros são as funções constantes $\mathbf{0}_L$ e $\mathbf{1}_L$, respectivamente, e o inverso aditivo de ϕ é a função $x \mapsto -\phi(x)$. Quanto ao inverso multiplicativo, ele será a função $x \mapsto \phi(x)^{-1}$, mas só pode ser definido se $\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in L$.

Seja agora U um ultra-filtro livre em L (cuja existência é garantida pelo Teorema 4.33). Definimos em R a relação de equivalência $\stackrel{U}{=}$, dizendo que

$$\phi \stackrel{U}{=} \eta \qquad \text{se existe } A \in U: \ \phi(x) = \eta(x)\ \forall\, x \in A\,;$$

note que uma forma equivalente para dar a definição é

$$\phi \stackrel{U}{=} \eta \qquad \text{se o conjunto } B = \{x \in L: \ \phi(x) = \eta(x)\} \in U\,,$$

de fato, B satisfaz a primeira formulação, enquanto se $\phi = \eta$ em A então $A \subseteq B$ e logo $B \in U$. A seguir escreveremos mais brevemente $\{\phi = \eta\}$ para indicar o conjunto $\{x \in L: \ \phi(x) = \eta(x)\} \subseteq L$.

É fácil ver que $\stackrel{U}{=}$ é reflexiva ($\phi \stackrel{U}{=} \phi,\ \forall \phi \in R$) e simétrica ($\phi \stackrel{U}{=} \eta,\ \Longleftrightarrow \eta \stackrel{U}{=} \phi$).

Para ver que é transitiva ($\phi \stackrel{U}{=} \psi,\ e\ \psi \stackrel{U}{=} \eta \implies \phi \stackrel{U}{=} \eta$) observamos que se $\phi = \psi$ em $A \in U$ e $\psi = \eta$ em $B \in U$ então $\phi = \eta$ em $A \cap B \in U$, pela propriedade dos filtros.

Estas propriedades caracterizam as relações de equivalência, e como já vimos implicam que R pode ser dividido em "classes de equivalência", ou seja nos conjuntos disjuntos dos elementos que estão em relação entre sí.

Chamaremos K o conjunto destas classes de equivalência[10].

Usaremos a notação $[\phi] \in K$ para a classe que contém $\phi \in R$, em particular, $[0]$ (a classe que contém a função nula) será o conjunto

$$[0] = \{\phi \in R: \ \exists A \in U: \ \phi = 0 \ em\ A\} = \{\phi \in R: \ \{\phi = 0\} \in \ U\}$$

e mais em geral

$$[\eta] = \{\phi \in R: \ \{\phi = \eta\} \in \ U\} = \{\phi \in R: \ \phi - \eta \in [0]\}\,,$$

ou seja, indicando $I := [0]$, podemos representar $[\eta] = \eta + [0] = \{\eta + i: \ i \in I\}$.

Note que I tem a seguinte propriedade:

- i) $\varphi, \eta \in I \implies \varphi + \eta \in I$,
- ii) $\varphi \in I$ e $\theta \in R \implies \varphi \cdot \theta \in I$:

[10] O conjunto K é usualmente indicado por $R/_{\stackrel{U}{=}}$ e chamado de conjunto quociente de R com respeito à relação de equivalência $\stackrel{U}{=}$.

dizemos então que I é um ideal do anel R.[11].

Prova das propriedades. Se $A = \{\psi = 0\} \in U$ e $B = \{\eta = 0\} \in U$ então $\psi + \eta = 0$ em $A \cap B \in U$.

Se $A = \{\psi = 0\} \in U$ então $\psi \cdot \theta = 0$ em $A \in U$. □

6.1 Construção do corpo

No conjunto K, vamos agora definir duas operações e uma ordem.

As operações são definidas como

$$\begin{cases} [\phi] + [\eta] = [\phi + \eta]\,, \\ [\phi] \cdot [\eta] = [\phi \cdot \eta]\,. \end{cases} \tag{6.2}$$

Note que estas definições são coerentes, ou seja, a classe resultado não depende do elemento escolhido dentro das classes dos fatores. De fato, para qualquer $\psi \in [\phi]$ e $\theta \in [\eta]$, temos $\psi - \phi, \theta - \eta \in I$, logo pelas propriedade do ideal, $(\psi + \theta) - (\phi + \eta) \in I$ e $(\psi \cdot \theta) - (\phi \cdot \eta) = (\psi - \phi) \cdot \theta + \phi \cdot (\theta - \eta) \in I$, ou seja, $\psi + \theta \in [\phi + \eta]$ e $\psi \cdot \theta \in [\phi \cdot \eta]$.

Com esta construção temos o seguinte importante resultado.

Lema 6.1. *K com as operações definidas em 6.2 é um corpo.*

Demonstração. Por como são definidas as operações, elas herdam todas as propriedades das operações de R. Em particular, $[\mathbf{0}_L]$ e $[\mathbf{1}_L]$ (as classes da função contante 0 e 1, respectivamente) são os elementos neutros da soma e da multiplicação em K. Apenas precisamos mostrar a existência do elemento inverso da multiplicação para cada $[\phi] \in K \setminus \{[0]\}$. Veremos que para isso será indispensável usar o fato que U é um ultra-filtro e não apenas um filtro.

Se $\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in L$, então tomado $\phi^{-1} : x \mapsto \phi(x)^{-1}$ temos que $\phi \cdot \phi^{-1} = \mathbf{1}_L$, logo $[\phi] \cdot [\phi^{-1}] = [\mathbf{1}_L]$, mostrando que $[\phi^{-1}]$ é o elemento inverso de $[\phi]$.

Tomando um genérico $\psi \notin [0]$, temos que $A = \{\psi = 0\} \notin U$; como U é um ultrafiltro então $A^c \in U$ e logo $\mathbf{1}_A \in [0]$, já que $\{\mathbf{1}_A = 0\} = A^c \in U$. Isso implica que tomando $\phi := \psi + \mathbf{1}_A$, temos $[\phi] = [\psi]$, mas como $\phi \neq 0$ para todo $x \in L$, obtemos a existência do inverso $[\psi]^{-1} = [\phi^{-1}]$. □

Definimos agora uma ordem em K, definido o conjunto dos positivos como

$$K^+ = \{[\phi] :\ \phi(x) > 0 \ \forall\, x \in L\}. \tag{6.3}$$

Lema 6.2. *K com as operações e a ordem definidas em (6.2) e (6.3) é um corpo ordenado.*

[11] Vale também o vice-versa: dado um ideal I de R, a família dos conjuntos $\{\phi = 0\} :\ \phi \in I$ forma um filtro. A condição de ser ultra-filtro corresponde à propriedade do ideal I ser maximal (ou seja, não ser contido em outro ideal distinto de R).
O que será mostrado mais adiante nesta seção corresponde a um conhecido teorema de teoria dos anéis, que diz que o quociente de um anel com respeito a um ideal é um corpo, se e só se o ideal é maximal.

Demonstração. Precisamos mostrar que as propriedades vistas na seção 2.1 estão satisfeitas. De novo é fundamental que U seja um ultra-filtro.

C1: É fácil de verificar, já que se $\phi(x), \psi(x) > 0\ \forall x \in L$ o mesmo vale para $\phi + \psi$ e para $\phi \cdot \psi$.

C2: Aqui de novo é importante a propriedade de ultra-filtro: dada $\phi \in R$, podemos decompor $\phi = \phi^+ - \phi^-$ onde $\phi^\pm = \max\{0, \pm\phi\}$ e L como reunião disjunta: $L = \{\phi = 0\} \cup \{\phi > 0\} \cup \{\phi < 0\}$; vimos no corolário 4.31 que então um e apenas um dos três conjuntos pertence a U: quando $\{\phi = 0\} \in U$ significa que $[\phi] = [0]$, quando $A := \{\phi > 0\} \in U$ significa que $[\phi] \in K^+$, já que $[\phi] = [\phi + \phi^- + \mathbf{1}_{A^c}]$ e $\phi + \phi^- + \mathbf{1}_{A^c}$ é positiva em todo L. Enfim, quando $\{\phi < 0\} \in U$ significa que $-[\phi] \in K^+$.

Note que da prova acima deduzimos que $[\phi] > 0$ se e só se $\{\phi > 0\} \in U$. □

Observando que o mapa $J : \mathbb{R} \to K : r \mapsto [\mathbf{r}_L]$ é injetor e preserva as operações e a ordem, podemos identificar as classes das funções constantes $\mathbf{r}_L$ com os reais r. Neste sentido diremos que K é um corpo ordenado que contém $\mathbb{R}$ e escreveremos $r \in K$ para indicar a classe $[\mathbf{r}_L]$ com $r \in \mathbb{R}$.

6.2 O caso $L = \mathbb{N}$

Nesta seção consideraremos o caso em que como conjunto infinito L se considere o conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais. Usaremos então a notação de sequências para os elementos de $R := \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

O lema a seguir mostra que, de fato, K estende $\mathbb{R}$, ou seja, é um corpo super-real. Para que isso aconteça é necessária a hipótese feita sobre o ultra-filtro U de ser livre.[12]

Lema 6.3. *Existe $\eta \in K$ tal que $\eta > n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.* [13]

Demonstração. Considere a sequência $\phi_i = i$ e fixe $n \in \mathbb{N}$: mostraremos que $[\phi] > [\mathbf{n}_\mathbb{N}]$ (ou seja, a classe de ϕ é um elemento de K maior que a classe correspondente a qualquer numero natural).

De fato, $\{\phi - n > 0\} = \{i \in \mathbb{N} : i > n\} \in U$ por ser um conjunto co-finito e U ser um ultra-filtro livre, logo $[\phi - \mathbf{n}_\mathbb{N}] > 0$. □

Usando o mesmo raciocínio usado na prova acima, podemos ver que $[1/i] \in K$ é um infinitésimo. É costume indicar por α o super-real infinito $\alpha := [i]$; desta forma o infinitésimo $[1/i] = 1/\alpha$.

[12]Se U não for livre, não é difícil ver que então deve conter um conjunto de apenas um elemento: de fato, se U contém um conjunto finito $F = \{a_1, .., a_n\}$ mas todos os conjuntos da forma $X \setminus \{a_i\} \in U$, então a interseção deles $X \setminus F \in U$, contradição.
Por consequência, neste caso todas as sequências que tem o mesmo valor neste elemento estariam na mesma classe, e logo K e $\mathbb{R}$ seriam o mesmo corpo.

[13]O Lema 6.3 pode facilmente ser estendido ao caso L enumerável, fazendo uma bijeção entre L e $\mathbb{N}$.
Caso L não seja enumerável, como o caso que veremos na seção 7.1, a prova acima nao serve: precisaremos de uma condição diferente sobre o ultra-filtro U.

Exemplo 6.4. Usando o fato de U ser ultra-filtro livre, é fácil ver que
– se $\phi_i = r$ para $i > n_0$ (sequência definitivamente constante), então $[\phi_i] = r$.
– se $\phi_i > \psi_i$ definitivamente, então $[\phi_i] > [\psi_i]$.
– se ϕ_i é limitada então $[\phi_i]$ é finito.

Em particular, $[1/i]$, $[1/(i+1)]$ e $[1/i^2]$ são todos infinitésimos distintos: $[1/i] > [1/(i+1)] > [1/i^2] > 0$, além disso $[1/i]/[1/i^2]$ é infinito: são infinitésimos "de ordem diferente".

Algumas situações porém são menos triviais: considere

$$\phi_i = \begin{cases} 1 & se\ i\ par \\ -1 & se\ i\ \text{ímpar} \end{cases}, \qquad \psi_i = \begin{cases} 1 & se\ i\ par \\ i & se\ i\ \text{ímpar} \end{cases}, \qquad \eta_i = \begin{cases} 1 & se\ i \equiv 1\ (mod 3) \\ 1/i & se\ i \equiv 2\ (mod 3) \\ i & se\ i \equiv 0\ (mod 3) \end{cases}.$$

É possível dizer que $[\phi_i] = 1$? ou $[\phi_i] = -1$? ou nenhum dos dois? E $[\psi_i]$ é finito ou infinito? e $[\eta_i]$ é infinitésimo, infinito ou nenhum dos dois?

A resposta é que depende: de fato, definimos K a partir de uma escolha de ultra-filtro, cuja existência pode ser provada mas sem que seja possível descrevê-lo explicitamente. Por consequência, a resposta às perguntas anteriores é que $[\phi_i] = 1$ se o conjunto dos pares pertence a U, em caso contrário $[\phi_i] = -1$. Analogamente $[\psi_i]$ e $[\eta_i]$ serão 1, infinito ou infinitésimo dependendo de qual entre $\{2j,\ j \in \mathbb{N}\}$ e $\{2j-1,\ j \in \mathbb{N}\}$ pertence ao ultra-filtro (ou entre $\{3j,\ j \in \mathbb{N}\}$, $\{3j-1,\ j \in \mathbb{N}\}$ e $\{3j-2,\ j \in \mathbb{N}\}$ no caso de η_i).

Consideremos enfim as sequências $\phi_i = \sin(\pi\, i/100)$ e $\psi_i = \sin(i)$. Como ϕ_i atinge no máximo 200 valores distintos e depois repete, o mesmo raciocínio anterior nos diz que $[\phi_i]$ será um destes valores (dependendo do ultra-filtro escolhido). Por outro lado ψ_i nunca se repete, deixando a análise mais difícil. Observando que $-1 < \psi_i < 1$ e que $\psi_i \neq 0$, pata todo $i \in \mathbb{N}$, podemos concluir que $-1 < [\psi_i] < 1$ e $[\psi_i] \neq 0$, mas de novo, a qual super-real corresponde dependerá da escolha do ultra-filtro; além disso teremos $[\psi_i] > 0$, se $\{\psi_i > 0\} \in U$ e $[\psi_i] < 0$, em caso contrário. $\lhd$

6.3 A noção de α-limite

Como vimos na seção anterior, a cada sequência em $\mathbb{R}$ pode ser associado um elemento do corpo K. Este procedimento lembra em parte a construção dos números reais como limites de certas sequências de racionais.

Pensando assim podemos enxergar a operação que associa a cada sequência a sua classe em K como uma operação de limite, que chamaremos de $\underline{\alpha\text{-limite}}$[14], definida como

$$\lim_{n \nearrow \alpha} \phi_n := [\phi_n] \in K\,.$$

[14]Como α é o super-real associado à sequência $n \mapsto n$, escrevemos que o índice n tende a α e usamo a seta para cima para distinguir da usual notação de limite: assim temos $\lim_{n \nearrow \alpha} n = \alpha$.

Em vista da construção feita, esta operação de limite possui as propriedades a seguir:[15]

- $(P-1)$ Existência: para toda sequência $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ existe um único elemento $L \in K$ que seja o α-limite de φ.
- $(P-2)$ Se φ_n é definitivamente igual a $r \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{n \nearrow \alpha} \varphi_n = r = [\mathbf{r}_{\mathbb{N}}] \,.$$

- $(P-3)$ Operações e confronto: para todas $\varphi, \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \nearrow \alpha} \varphi_n + \lim_{n \nearrow \alpha} \psi_n = \lim_{n \nearrow \alpha} (\varphi_n + \psi_n) \,, \\
&\lim_{n \nearrow \alpha} \varphi_n \cdot \lim_{n \nearrow \alpha} \psi_n = \lim_{n \nearrow \alpha} (\varphi_n \cdot \psi_n) \,, \\
&\text{se } \varphi_n \geq \psi_n \text{ definitivamente, então } \lim_{n \nearrow \alpha} \varphi_n \geq \lim_{n \nearrow \alpha} \psi_n \,.
\end{aligned}$$

7 Um espaço para todos os objetos matemáticos

Nesta seção introduziremos os primeiros conceitos necessários para definir ultrafunções[16].

Primeiramente queremos construir um conjunto suficientemente grande para conter os números reais e todos os objetos de interesse para desenvolver uma teoria de equações diferenciais, como produtos cartesianos, funções, relações, etc.

Definimos o conjunto

$$\Lambda := V_\infty(\mathbb{R}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n(\mathbb{R}), \tag{7.1}$$

onde os conjuntos $V_n(\mathbb{R})$ são definidos indutivamente como

$$V_0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \qquad V_n(\mathbb{R}) = V_{n-1}(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}(V_{n-1}(\mathbb{R})) : n \in \mathbb{N} \,.$$

Exemplo 7.1. Consideremos inicialmente $V_1(\mathbb{R})$:

$$V_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,,$$

ou seja, farão parte de $V_1(\mathbb{R})$ elementos do tipo, 1, $\sqrt{2}$, mas também elementos do tipo $\{1\}$, $\{\sqrt{2}\}$, $\{1, \sqrt{2}\}$, por exemplo: $\{\ 1,\ \{\sqrt{2}\},\ \{1, \sqrt{2}\}\ \} \subseteq V_1$.

Para obter $V_2(\mathbb{R})$, parte-se de $V_1(\mathbb{R})$, pondo

$$V_2(\mathbb{R}) = V_1(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}(V_1(\mathbb{R})) \ :$$

[15]De fato, estas propriedades são tudo que precisa para poder trabalhar com o $\alpha-$limite e o corpo super-real no qual toma valores. Em alguns trabalhos, como por exemplo em [BB16, BL17], a existência do corpo e do α-limite com estas propriedades (ou do $\Lambda-$limite que veremos mais a frente) é apenas postulada como axioma. A construção que mostramos aqui prova então que tais propriedades são coerentes.

[16]Estamos seguindo para esta parte a referência [Ben22].

Logo, os elementos de V_2 serão do tipo 1, $\sqrt{2}$, do tipo $\{1\}$, $\{\sqrt{2}\}$, $\{1, \sqrt{2}\}$, e também do tipo $\{\{1\}\}$, $\{1, \{\sqrt{2}\}\}$, por exemplo: $\{\ 1,\ \{\sqrt{2}\},\ \{\{1\}\}\ \} \subseteq V_2(\mathbb{R})$.

Continuando desta forma, definimos $V_3(\mathbb{R})$ e assim por diante até obter Λ. ◁

Para enxergar outros objetos matemáticos como elementos de Λ usaremos a seguinte identificação: dado um par ordenado (a, b), identificamos ele com o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ (dito par de Kuratowski), ou seja, um conjunto cujos elementos são o conjunto {a,b} contendo os elementos do par ordenado e o conjunto $\{a\}$, que indica qual dos dois elementos deve ser considerado o primeiro do par ordenado.

Desta forma, Λ contém não apenas $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos, mas também $\mathbb{R}^2$ e, procedendo indutivamente, contém também $\mathbb{R}^n$ e qualquer produto cartesiano de conjuntos que já estejam em Λ, junto com seus subconjuntos.

Como funções ou relações podem ser caracterizadas pelos seus gráficos, podemos também considerar que Λ também contém qualquer função ou relação entre elementos de Λ, ou seja, todas as entidades matemáticas utilizadas em Equações Diferenciais Parciais.

Exemplo 7.2. Vejamos alguns exemplos da construção acima:

- o elemento de Λ que corresponde a $\mathbb{R}^2$ é

$$\{\ \{\{x\}, \{x, y\}\} :\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}\,;$$

- o elemento de Λ que descreve a função $\sin : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é

$$\{\ \{\{x\}, \{x, sin(x)\}\} :\ x \in \mathbb{R}\}\,.$$

Podemos ver que ambos conjuntos pertencem a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))) \subseteq V_3(\mathbb{R}) \subseteq \Lambda$. ◁

Vamos agora ver uma primeira forma de definir limites usando Λ: seja

$$\mathcal{L} = \mathcal{P}_{fin}(\Lambda) \tag{7.2}$$

a família dos subconjuntos finitos de Λ. Então $\mathcal{L}$ equipado com a ordem parcial $\trianglelefteq := \subseteq$ é um conjunto direcionado que podemos usar para construir redes: uma função $\varphi : \mathcal{L} \to E$ é uma *rede* (com valores em E).

Com as definições vistas na seção 4.1, podemos tomar limites destas redes (usaremos a notação $\lim_{\lambda\to\Lambda}$ para estes limites); por exemplo, se $\varphi : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, então

$$\lim_{\lambda\to\Lambda} \varphi(\lambda) = L \in \mathbb{R}$$

significa que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \lambda_0 \in \mathcal{L},\ \text{tal que } \forall \lambda \supseteq \lambda_0\,, \quad |\varphi(\lambda) - L| < \epsilon. \tag{7.3}$$

Exemplo 7.3. A integral de uma função contínua $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ pode ser definida através do tipo de limite definido acima, da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to \Lambda} \sum_{x \in [a,b] \cap \lambda} f(x)(x^+ - x), \tag{7.4}$$

onde $x^+ = min\left(\{y \in [a,b] \cap \lambda : \ y > x\} \cap \{b\}\right)$.

Note que quando $\lambda \in \mathcal{L}$, ele é um conjunto finito, ao intersectar ele com $[a,b]$ selecionamos apenas os elementos dele que são reais em $[a,b]$ (desconsiderando qualquer elemento que seja conjunto): $[a,b] \cap \lambda$ será então um conjunto finito de pontos em $[a,b]$.

Desta forma a definição de x^+ é bem posta já que $\mathbb{R} \cap \lambda$ também é finito e logo o mínimo é atingido.

O limite (7.4) então diz que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\lambda_0 \in \mathcal{L}$ (ou seja, existe um conjunto finito de pontos em $[a,b]$) tal que $\forall \lambda \supseteq \lambda_0$ (ou seja, para todo conjunto finito de pontos em $[a,b]$ que contenha o anterior) a somatória acima dista de $\int_a^b f(x)dx$ menos de ε.

Para uma função contínua isso coincide com a integral de Riemann de f em $[a,b]$. $\lhd$

7.1 Um corpo super-real construído em cima de $\mathcal{L}$

Vamos agora retomar a construção da seção 6, mas agora tomaremos como conjunto L o conjunto $\mathcal{L}$ definido em (7.2). Desta forma consideramos o anel $R := \mathcal{F}(\mathcal{L}, \mathbb{R})$ de todas as funções a valores reais com domínio $\mathcal{L}$, indicando por $\mathbf{k}_{\mathcal{L}}$ a função contante k e por $\mathbf{k}_A$ a função que vale 1 em $A \subset \mathcal{L}$ e 0 em $\mathcal{L} \setminus A$. Note que como $\mathcal{L}$ é um conjunto direcionado, podemos ver os elementos de R como redes.

Tomaremos um ultra-filtro U em $\mathcal{L}$ e consideraremos a relação de equivalência $\stackrel{U}{=}$ em R. Desta forma o conjunto das classes de equivalência $K := R/_{\stackrel{U}{=}}$ será, como vimos, um corpo.

Precisamos porém rever o Lema 6.3 que era específico para o caso $L = \mathbb{N}$.

Para isso precisamos assumir a seguinte condição sobre o ultra-filtro U (análoga à condição de ser livre que usamos na seção 6):

$$\text{para todo } \lambda \in \mathcal{L} \text{ o conjunto } S_\lambda := \{\mu \in \mathcal{L} : \lambda \trianglelefteq \mu\} \text{ pertence ao ultra-filtro } U. \tag{7.5}$$

A existência de um ultra-filtro com esta propriedade (dito <u>ultra-filtro fine</u>) pode também ser provada usando o Lema de Zorn, veja os Teoremas 4.32 e 4.33, de fato a família $S_\lambda : \ \lambda \in \mathcal{L}$ forma um filtro que pode ser estendido a um ultra-filtro.

Temos então o análogo do Lema 6.3:

Lema 7.4. *Existe $\eta \in K$ tal que $\eta > n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. A prova é análoga ao do Lema 6.3, considerando que quando é usado o fato que os conjuntos da forma $\{i \in \mathbb{N} : i > n\}$ pertencem ao ultra-filtro por ser livre, usaremos o fato que os conjuntos da forma S_λ pertencem agora a U pela condição (7.5). Desta forma provamos que $[\phi] > n = [\mathbf{n}_{\mathcal{L}}]$ para a rede $\phi(\lambda) = \#\lambda$ (a cardinalidade do conjunto λ), já que tomando $\lambda \in \mathcal{L}$ tal que $\#\lambda > n$, temos que $\#\mu > n$ para todo $\mu \in S_\lambda$ (logo $S_\lambda \subseteq \{\phi > n\}$ e logo $\{\phi > n\} \in U$, ou seja, $[\phi - \mathbf{n}_{\mathcal{L}}] > 0$). $\square$

A que fizemos aqui é então uma outra construção para um corpo super-real K, baseada agora em redes no lugar de sequências.

7.2 A noção de Λ-limite

De maneira análoga ao feito na seção 6.3, podemos enxergar a operação que associa cada rede a sua classe em K como uma operação de limite, que chamaremos agora de Λ-limite, definida como

$$\lim_{\lambda \nearrow \Lambda} \phi(\lambda) := [\phi] \in K\,.$$

O Λ-limite possui então as mesmas propriedades (P - 1..3) do α-limite, onde agora "definitivamente" deve ser entendido como "em um conjunto da forma S_{λ_0}", ou seja, "para todo $\lambda \trianglerighteq \lambda_0$".[17]

Note que para uma rede a valores reais temos duas noções de limite: $\lim_{\lambda\nearrow\Lambda} \psi(\lambda)$ é o $\Lambda-$limite que acabamos de definir, enquanto $\lim_{\lambda\to\Lambda} \psi(\lambda)$ é o limite usual (que chamaremos de Cauchy) definido em (7.3). A relação entre os dois é dada pelo resultado a seguir.

Teorema 7.5. *Dada uma rede real $\psi(\lambda)$:*

- *se existe o limite de Cauchy $\lim_{\lambda\to\Lambda} \psi(\lambda) = L$ então L é a parte standard do $\Lambda-$limite: $L = st(\lim_{\lambda\nearrow\Lambda} \psi(\lambda)\,)$;*
- *se o $\Lambda-$limite $\lim_{\lambda\nearrow\Lambda} \psi(\lambda) = \xi \in \mathbb{K}$ é finito, então existe uma sequência $\lambda_n \in \mathcal{L}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \psi(\lambda_n) = st(\xi)$.*

Demonstração. Em vista da propriedade $(P-3)$, é suficiente mostrar o caso $L = 0$ e $st(\xi) = 0$.

Para a primeira afirmação temos que definitivamente $-\frac{1}{n} \leq \psi(\lambda) \leq \frac{1}{n}$, logo tomando o Λ-limite concluímos $-\frac{1}{n} \leq \lim_{\lambda\nearrow\Lambda} \psi(\lambda) \leq \frac{1}{n}$ e como isso vale para todo $n \in \mathbb{N}$ obtemos que $\lim_{\lambda\nearrow\Lambda} \psi(\lambda)$ é infinitésimo, ou seja, sua parte standard é 0.

Para a segunda afirmação, dado $n \in \mathbb{N}$, se definitivamente valesse $\psi(\lambda) \geq \frac{1}{n}$, então $\lim_{\lambda\nearrow\Lambda} \psi(\lambda) \geq \frac{1}{n}$, contradizendo $st(\xi) = 0$; da mesma forma não é possível que definitivamente tenha-se $\psi(\lambda) \leq -\frac{1}{n}$. Concluímos que existe $\lambda_n \in \mathcal{L}$ tal que $\psi(\lambda_n) \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ e logo temos a conclusão.

Note que a sequencia λ_n pode ser tomada de forma que $\lambda_{n-1} \subseteq \lambda_n \; \forall\, n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 7.6. Considerando a rede $\phi(\lambda) = \#\lambda$ usada na prova do Teorema 7.4, e a rede $\psi(\lambda) = 1/\#\lambda$, temos que $\eta := lim_{\lambda\nearrow\Lambda}\phi(\lambda)$ é um super-real infinito e $\lim_{\lambda\nearrow\Lambda} \psi(\lambda) = 1/\eta$ é infinitésimo.

A sequencia $\lambda_n = \{1, ..., n\}$ satisfaz $\lim_{n\to\infty} \psi(\lambda_n) = 0 = st(1/\eta)$, como indicado pelo Teorema 7.5.

Note que o limite de Cauchy $\lim_{\lambda\to\Lambda} \psi(\lambda)$ existe e é zero, mas $\lim_{\lambda\to\Lambda} \phi(\lambda)$ não existe. ◁

[17] Na verdade, as propriedades valem também entendendo "definitivamente" apenas como "em um conjunto do ultra-filtro".

7.2.1 Λ-Limite para conjuntos

Para terminar, queremos definir também um Λ-Limite de redes a valores em Λ, ou seja, redes de objetos matemáticos bem gerais.

Para isso usaremos indução: seja $\varphi : \mathcal{L} \to \Lambda$, dizemos que φ é **limitada** se existe um n tal que $\varphi(\lambda) \in V_n(\mathbb{R})\ \forall \lambda \in \mathcal{L}$. Consideremos então uma rede limitada

$$\varphi : \mathcal{L} \to V_n(\mathbb{R}) \tag{7.6}$$

Para $n = 0$, $V_0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ e logo o $\Lambda-$limite é o definido anteriormente. Para $n = 1$, os valores de $\varphi(\lambda)$ podem ser reais ou conjuntos de reais. Na verdade, pelas propriedades dos ultra-filtros sabemos que apenas um dos conjuntos $\{\lambda \in \mathcal{L} :\ \varphi(\lambda) \in \mathbb{R}\}$ e $\{\lambda \in \mathcal{L} :$ $\varphi(\lambda)$ é conjunto$\}$ está em U. No primeiro caso o $\Lambda-$limite é definido como no caso $n = 0$, enquanto no segundo caso podemos supor que $\varphi(\lambda)$ é sempre um conjunto e definimos

$$\lim_{\lambda \nearrow \Lambda} \varphi(\lambda) = \left\{ \lim_{\lambda \nearrow \Lambda} \psi(\lambda) :\ \psi : \mathcal{L} \to \mathbb{R} \ e\ \psi(\lambda) \in \varphi(\lambda)\ \forall \lambda \in \mathcal{L} \right\}, \tag{7.7}$$

ou seja, $\lim_{\lambda \nearrow \Lambda} \varphi(\lambda)$ é um conjunto cujos elementos são todos os possíveis $\Lambda-$limites de redes reais definidas pegando, para cada λ, um elemento do conjunto $\varphi(\lambda)$.

Analogamente, assumindo que o limite esteja definido para redes a valores em $V_{n-1}(\mathbb{R})$, podemos definir para a rede φ em (7.6) (de novo podendo supor que $\varphi(\lambda)$ seja sempre um conjunto) como segue:

$$\lim_{\lambda \nearrow \Lambda} \varphi(\lambda) = \left\{ \lim_{\lambda \nearrow \Lambda} \psi(\lambda) :\ \psi : \mathcal{L} \to V_{n-1} \ e\ \psi(\lambda) \in \varphi(\lambda)\ \forall \lambda \in \mathcal{L} \right\},$$

Exemplo 7.7.
- $\lim_{\lambda \nearrow \Lambda}\{\#\lambda\} = \{\lim_{\lambda \nearrow \Lambda} \#\lambda\}$: de fato, a rede ψ na definição 7.7 só pode ser escolhida na forma $\psi(\lambda) = \#\lambda$.
- Consideremos $\lim_{\lambda \nearrow \Lambda}\{1, 2, .., \#\lambda\}$. Neste caso a rede ψ pode ser definida escolhendo para $\psi(\lambda)$ um qualquer natural entre 1 e $\#\lambda$. Por consequência o limite é um conjunto infinito, que contém todos os naturais (podemos por exemplo escolher $\psi(\lambda) = \min\{\#\lambda, 7\}$, cujo limite é 7), mas também super-reais infinitos como $\lim_{\lambda \nearrow \Lambda} \#\lambda$, $\lim_{\lambda \nearrow \Lambda}\lfloor \#\lambda/2 \rfloor$, etc. $\triangleleft$

Referências

[BB16] V. Benci and L. Luperi Baglini, *A topological approach to non-Archimedean mathematics*, Geometric properties for parabolic and elliptic PDE's. Contributions of the 4th Italian-Japanese workshop, GPPEPDEs, Palinuro, Italy, May 25–29, 2015, Cham: Springer, 2016, pp. 17–40 (English).

[Ben22] V. Benci, *An improved setting for generalized functions: fine ultrafunctions*, Milan J. Math. **90** (2022), no. 2, 575–646. MR 4516505

[BL17] V. Benci and L. Luperi Baglini, *Generalized solutions in PDEs and the Burgers' equation*, J. Differ. Equations **263** (2017), no. 10, 6916–6952 (English).

[Kei76] H. J. Keisler, *Foundations of infinitesimal calculus*, New Jersey: Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1976.

[Kha] I. Khatchatourian, *Nets and filters (are better than sequences); https://www.math.utoronto.ca/ivan/mat327/docs/other/nets.pdf*,.

[LIM76] E. L. LIMA, *Elementos de topologia geral*, Livros Técnicos e Científicos. Rio de Janeiro, 1976.

[LIM04] ______, *Curso de análise, vol.1; 11 edição*, Rio de Janeiro. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004.