

C1 Distribuições em $\mathbb{R}^N$

C1.1 Alguns lembretes em várias variáveis

C1.1.1 Derivada direcional

Seja $f \in \mathcal{C}^k(V)$ com $V \subseteq \mathbb{R}^N$ vizinhança de x_0 , e $v \in \mathbb{R}^N$ unitário: a derivada k -ésima em direção v vale :

$$D_v^k f(x_0) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) v^\alpha. \quad (\text{C1.1})$$

C1.1.2 Polinômio de Taylor

Se f é derivável em x_0 até a ordem k escrevemos

$$f(x) = T_{f,x_0}^k(x) + R_{f,x_0}^k(x)$$

onde

$$T_{f,x_0}^k(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha.$$

Se $f \in \mathcal{C}^{k+1}(V)$ e o segmento $\overline{x_0 x}$ é contido em V temos

Resto de Lagrange

$$R_{f,x_0}^k(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f(\boldsymbol{\tau})}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha, \quad \text{com } \boldsymbol{\tau} \text{ no segmento } \overline{\mathbf{x}_0 \mathbf{x}}. \quad (\text{C1.2})$$

Resto integral ¹

$$R_{f,x_0}^k(\mathbf{x}) = (k+1) \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-s)^k \partial^\alpha f(\mathbf{x}_0 + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) ds \quad (\text{C1.3})$$

¹Uma versão reparametrizada é

$$R_{f,x_0}^k(x_0 + t\mathbf{v}) = (k+1) \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\mathbf{v}^\alpha}{\alpha!} \int_0^t (t-s)^k \partial^\alpha f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{v}) ds$$

Se $f \in \mathcal{C}^k(V)$ apenas podemos escrever

$$R_{f,\mathbf{x}_0}^k(\mathbf{x}) = k \sum_{|\alpha|=k} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-s)^{k-1} [\partial^\alpha f(\mathbf{x}_0 + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) - \partial^\alpha f(\mathbf{x}_0)] ds$$

Se V é convexo isso mostra que

$$f \in \mathcal{C}^\ell(V) \text{ implica } R_{f,\mathbf{x}_0}^k(\mathbf{x}) \in C^{\ell-k}(V \times V) \text{ em } x_0 \text{ e } x. \quad (\text{C1.4})$$

$$\frac{R_{f,\mathbf{x}_0}^k(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^k} \rightarrow 0 \text{ uniformemente em } K \times K \text{ para } \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rightarrow 0,$$

sendo K um compacto em V .

2

C1.1.3 Teorema do divergente

Dado um campo vetorial $F \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ com $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto limitado com borda regular,³ se todas as integrais convergem, vale

$$\int_{\Omega} \text{div}(F) dV = \int_{\partial\Omega} F \cdot \boldsymbol{\nu} dS, \quad (\text{C1.7})$$

²Algumas versões para o caso em $\mathbb{R}$:

Lagrange: $R_{f,x_0}^k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}$ com τ entre x e x_0

Integral:

$$R_{f,x_0}^k(x) = \frac{1}{k!} \int_{x_0}^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t) dt \quad (\text{C1.5})$$

$$= \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k!} \int_0^1 (1-s)^k f^{(k+1)}(x_0 + s(x-x_0)) ds \quad (\text{C1.6})$$

³A borda precisa ser localmente o gráfico de uma função $\mathcal{C}^1$, mas na verdade o resultado pode ser estendido ao caso com fronteira Lipschitz

C1.2 Alguns lembretes em análise complexa

Consideremos

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z = (x + iy) \mapsto f(z).$$

Definição C1.1. Dizemos que

- f é **(complexamente) derivável** se existe o número complexo

$$f'(z) = \frac{d}{dz} f(z) := \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}$$

- f é **holomorfa** (em U aberto) se for (complexamente) derivável em $u \in U$;
- f é **analítica** (em U aberto) se, para todo $x \in U$, f coincide com sua série de Taylor em uma oportuna viz. de x .



Seja $\tilde{f}(x, y) = f(x + iy)$:

a derivabilidade complexa equivale⁴ a $\tilde{f}$ ser diferenciável mais a condição $\tilde{f}_y = i\tilde{f}_x$, e assim

$$f' = \tilde{f}_x = -i\tilde{f}_y = \frac{1}{2}(\tilde{f}_x - i\tilde{f}_y);$$

Definindo $F(z, \bar{z}) = \tilde{f}(x, y) = \tilde{f}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$ temos⁵

$$F_z = \frac{1}{2}(\tilde{f}_x + \tilde{f}_y/i) = \frac{1}{2}(\tilde{f}_x - i\tilde{f}_y),$$

$$F_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\tilde{f}_x - \tilde{f}_y/i) = \frac{1}{2}(\tilde{f}_x + i\tilde{f}_y);$$

Com esta notação temos que

$$f \text{ é holomorfa em } U \iff F_{\bar{z}} = 0 \text{ em } U \implies f' = F_z$$

O operador $\partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ é dito **Operador de Cauchy-Riemann** (C-R).

⁴Em geral f e $\tilde{f}$ são indicadas pelo mesmo símbolo.

⁵Também costuma-se usar a mesma notação para f e F .

Teorema C1.2 [Formula de Cauchy - caso geral]. Se $\varphi \in \mathcal{C}^1(U)$, Ω regular com fecho em $U \subset \mathbb{C}$ e $0 \in \Omega$ então

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{\varphi(z)}{z} dz - \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{\varphi_{\bar{z}}}{z} dx dy;$$

mais em geral, se $z_0 \in \Omega$

$$\varphi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{\varphi(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{\varphi_{\bar{z}}}{z - z_0} dx dy.$$

Se φ for holomorfa então

$$\varphi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{\varphi(z)}{z - z_0} dz. \quad \triangleleft$$

Teorema C1.3. A função f é holomorfa em U se e só se é analítica em U . $\triangleleft$

C1.2.1 Funções analítica em $\mathbb{R}^N$

Para função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ com Ω aberto em $\mathbb{R}^N$ dizemos que f é **(real-)analítica** se em viz. de cada ponto coincide com sua série de Taylor.

Teorema C1.4 [Caracterização de Cauchy para Funções Real-Analíticas]. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e seja $f \in C^\infty(\Omega)$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. a função f é real-analítica em Ω ;
2. para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$, existem constantes $C, M > 0$ tais que

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C \cdot M^{|\alpha|} \cdot \alpha!, \quad \text{em } K, \forall \alpha \in MI_N.$$

$\triangleleft$

C1.3 Extensão de alguns resultados vistos em $\mathbb{R}$

Proposição C1.5. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ da forma $\Omega' \times I$ (seja $(x', t) \in \Omega' \times I$). Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ satisfaz $\partial_t u = 0$, então existe $w \in \mathcal{D}'(\Omega')$ tal que*

$$u(\varphi) = \int_I w(\varphi(\cdot, t)) dt = w\left(\int_I \varphi(\cdot, t) dt\right)$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Se $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ então u não depende de t .

Em particular

$$w : \alpha \mapsto u(\alpha(x')\rho(t))$$

onde $\rho \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ com $\int \rho = 1$.

Em geral, se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é solução da eq. em $\mathcal{D}'(\Omega)$

$$\partial_{x_j} u = f \tag{C1.8}$$

com $f, u \in \mathcal{C}(\Omega)$ então (C1.8) vale pontualmente.

◁

Compare este último ponto com o da prop. B5.6

Lema C1.6. *Seja $\Omega = \Omega' \times \Gamma$ (abertos), $\varphi(x, y) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ com $\varphi(\cdot, y) \in \mathcal{C}_0^\infty(K)$ para todo y , onde K é um compacto em Ω' , e $u \in \mathcal{D}'(\Omega')$.*

Então $u(\varphi(\cdot, y))$ é $\mathcal{C}^\infty$ em y e $\partial_y^\alpha [u(\varphi(\cdot, y))] = u(\partial_y^\alpha \varphi(\cdot, y))$ ◁

Proposição C1.7. $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ com $x_j u = 0$ para todo j então $u = c\delta_0$ ◁

Proposição C1.8. *Seja Ω aberto limitado e regular cujo fecho é contido em um aberto U . Então $\chi_\Omega \in \mathcal{D}'(U)$ e ⁶*

$$\partial_i(\chi_\Omega) = -\nu_i \delta_{\partial\Omega} \quad \text{onde} \quad \nu_i \delta_{\partial\Omega} : \varphi \mapsto \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_i dS$$

Logo, se $u \in \mathcal{D}'(U)$ é uma distribuição $\mathcal{C}^1(U)$, então $\partial_i(u\chi_\Omega)$ é a distribuição $(\partial_i u)\chi_\Omega - u\nu_i \delta_{\partial\Omega}$

◁

⁶Na verdade o resultado vale também com fronteira Lipschitz

Exercícios

Exercício C1.9. Seja

$$E(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{para } n \geq 3, \\ \frac{\ln(|x|)}{2\pi} & \text{para } n = 2, \\ \frac{|x|}{2} & \text{para } n = 1, \end{cases} \quad (\text{C1.9})$$

Mostre que

- $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$
- $\partial_j E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $\partial_j E = \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-1}} \frac{x_j}{|x|}$ no sentido das distribuições
- E satisfaz $\Delta E = \delta_0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

**Exercício C1.10.** Seja

$$E(y, \tau) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4\tau}} & \text{se } y \in \mathbb{R}^n, \tau > 0, \\ 0 & \text{se } y \in \mathbb{R}^n, \tau \leq 0, \end{cases} \quad (\text{C1.10})$$

Mostre que

- E é $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ e $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$
- $E(x, t) = a^n E(ax, a^2 t)$ com $a, x > 0$
- E satisfaz $E_\tau - \Delta_y E = \delta_0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$



Algumas contas uteis:

$$\partial_i |\mathbf{x}|^2 = 2x_i \text{ e } \partial_i |\mathbf{x}| = x_i / |\mathbf{x}|$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-|\mathbf{x}|^2) = \pi^{n/2}$$

Exercícios

Exercício C1.11. Seja

$$E(x, t) = \frac{1}{2} \chi_V(x, t) \quad (\text{C1.11})$$

onde $V = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x| < t\}$.

Mostre que

- $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$
- E satisfaz $\partial_{tt}E - \partial_{xx}E = \delta_0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$
- $F(x, y) = \chi_{\{x, y > 0\}}$ satisfaz $\partial_{xy}F = \delta_0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$

**Exercício C1.12.** Seja

$$E(z) = \frac{1}{\pi z} \quad (\text{C1.12})$$

Usando o Teorema C1.2, mostre que

- $E \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$
- E satisfaz $\partial_{\bar{z}}E = \frac{1}{2}(E_x + iE_y) = \delta_0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{C})$ ^a



^aPodemos definir distribuições em $\mathbb{C}$ usando a representação $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$

C2 Convolução

C2.1 Convolução distribuição-função

Se $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{R}^N$, definimos a **translação** $(\tau_h f)(x) := f(x + h)$.
Dadas $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ definimos a **convolução**

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x - y)dy. \quad (\text{C2.1})$$

Definição C2.1 (Convolução distr-funç.). Dada $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ definimos^a

$$(u * \varphi)(x) = u(\varphi(x - \cdot))$$

A mesma definição pode ser feita com $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. ★

^aPara ser mais claro às vezes usaremos a notação $u_z(\varphi(x, z))$ para indicar que a distribuição u é aplicada à função φ considerada função da variável z

Exemplo C2.2.

- no caso $u = u_f$ temos $(f * \varphi)(x) = \int f(y)\varphi(x - y)dy = (u_f * \varphi)(x)$, então estende a definição anterior;
- $\delta_0 * \varphi = \varphi$, $\delta_p * \varphi(x) = \varphi(x - p)$:
neste caso $\delta \in \mathcal{E}'$ logo podemos tomar $\varphi \in \mathcal{E}$, e o resultado $\delta * \varphi \in \mathcal{E}$;
- $((\sum_{\mathbb{N}} \delta_n) * \varphi)(x) = \sum_{\mathbb{N}} \varphi(x - n)$
neste caso $u = \sum_{\mathbb{N}} \delta_n \in \mathcal{D}'$ então precisa tomar $\varphi \in \mathcal{D}$ para ter soma finita, mas o resultado $u * \varphi \in \mathcal{E}$; ★

Proposição C2.3. Nas condições da definição ($u \in \mathcal{D}'$, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ ou $u \in \mathcal{E}'$, $\varphi, \psi \in \mathcal{E}$) vale

- $(u * \varphi)(0) = u(\varphi^\vee)$ onde $\varphi^\vee(x) := \varphi(-x)$
- $\tau_h(u * \varphi) = u * (\tau_h \varphi)$
- $u * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$
- $\partial^\alpha(u * \varphi) = u * (\partial^\alpha \varphi) = (\partial^\alpha u) * \varphi$
- $\text{supp}(u * \varphi) \subseteq \text{supp } u + \text{supp } \varphi$
- $(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi)$

- $u * \rho_j \rightarrow u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ (ρ_j seq. regularizante)
- dada $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ existe seq. u_j em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_j \rightarrow u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$; (com as notações vistas, $u_j = (\xi_j u) * \rho_{\varepsilon_j}$ com $\varepsilon_j \rightarrow 0$ suficientemente rápido).

◁

Lema C2.4.

- se $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ então $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n\varepsilon)\varepsilon \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(t)dt$
- se $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ então $\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^N} f(\mathbf{p}\varepsilon)\varepsilon^N \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{y})d\mathbf{y}$
- se $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M)$ então
 $(*) \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^N} f(x, \mathbf{p}\varepsilon)\varepsilon^N \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f(x, \mathbf{y})d\mathbf{y}$ unif. na variável x
e os suportes estão em um mesmo compacto;
- se $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M)$ o mesmo vale para as derivadas:
 $\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^N} \partial^\alpha f(x, \mathbf{p}\varepsilon)\varepsilon^N \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \partial^\alpha f(x, \mathbf{y})d\mathbf{y}$ unif. na variável x
ou seja **a conv (*) é no sentido $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$**
- as mesmas afirmações valem se $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M)$, sendo a convergência (*) no sentido $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ (uniforme nos compactos de todas as derivadas).

◁

C2.2 Convolução distribuição-distribuição

Note que $U : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) : \varphi \mapsto u * \varphi$ é uma mapa linear e contínua e comuta com a translação: $\tau_h(U\varphi) = U(\tau_h\varphi)$.

Em particular, vale o seguinte

Proposição C2.5. *Podemos identificar $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ com o conjunto das mapas $U : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N) \mapsto \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ lineares e contínuas que comutam com a translação, sendo a identificação dada por*

$$i(U) = [u : \varphi \mapsto (U\varphi^\vee)(0)] ; \quad i^{-1}(u) : \varphi \mapsto u * \varphi. \quad \triangleleft$$

Definição C2.6 (Convolução distr-distr.). Dadas $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ senda pelo menos uma de supp compacto, definimos $u * v$ como a única distribuição tal que $(u * v) * \varphi = u * (v * \varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. ★

Exemplo C2.7.

- $u * \delta_0 = u$

★

Proposição C2.8.

- $(u * v) * w = u * (v * w)$ (sendo pelo menos duas supp comp)
- $u * v = v * u$
- $\text{supp}(u * v) \subseteq \text{supp } u + \text{supp } v$
- $\partial^\alpha u = (\partial^\alpha \delta_0) * u$
- $\partial^\alpha (u * v) = (\partial^\alpha u) * v = u * (\partial^\alpha v)$

△

C2.3 Suporte singular

Definição C2.9.

- Dizemos que $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é $\mathcal{C}^h$ em x_0 se existe uma vizinhança V de x_0 tal que $u|_V$ é da forma u_f com $f \in \mathcal{C}^h(V)$;
- definimos o **suporte singular** de $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ como ^a

$$\text{singsupp} u = \Omega \setminus \{x \in \Omega : u \text{ é } \mathcal{C}^\infty \text{ em } x\}$$

- definimos o **suporte singular analítico** de $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ como

$$\text{singsupp}_a u = \Omega \setminus \{x \in \Omega : u \text{ é analítica em } x\} \quad \star$$

^aUsaremos as abreviações $S(u)$, $SS(u)$ e $SSa(u)$ para, respectivamente, supp , singsupp , singsupp_a .

Propriedades:

- $SS(u) \subseteq SSa(u) \subseteq S(u)$
- $SS(\partial^\alpha u) \subseteq SS(u)$ e $SSa(\partial^\alpha u) \subseteq SSa(u)$
- $SS(\varphi u) \subseteq SS(u)$ para $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$
 $SSa(\varphi u) \subseteq SSa(u)$ para φ analítica

Lema C2.10. Se u, v são distribuições, sendo uma de sup. compacto, então

$$\text{singsupp}(u * v) \subseteq \text{singsupp} u + \text{singsupp} v. \quad \triangleleft$$

Lista dos teoremas

C1.1	Definição	C3
C1.2	Teorema (Formula de Cauchy - caso geral)	C4
C1.3	Teorema	C4
C1.4	Teorema (Caracterização de Cauchy para Funções Real-Analíticas)	C4
C1.5	Proposição	C5
C1.6	Lema	C5
C1.7	Proposição	C5
C1.8	Proposição	C5
C1.9	Exercício	C6
C1.10	Exercício	C6
C1.11	Exercício	C7
C1.12	Exercício	C7
C2.1	Definição (Convolução distr-funç.)	C8
C2.2	Exemplo	C8
C2.3	Proposição	C8
C2.4	Lema	C9
C2.5	Proposição	C10
C2.6	Definição (Convolução distr-distr.)	C10
C2.7	Exemplo	C10
C2.8	Proposição	C10
C2.9	Definição	C11
C2.10	Lema	C11

Lista dos exercícios