

B1 Distribuições

Seja Ω um aberto em $\mathbb{R}^N$.

Definição B1.1. Uma **distribuição em Ω** é um funcional linear e contínuo $u : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$. ★

Notação: Indicando $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ por $\mathcal{D}(\Omega)$, o espaço das distribuições em Ω é usualmente indicado por $\mathcal{D}'(\Omega)$

Proposição B1.2. A condição de continuidade equivale às seguintes:

- para todo K compacto em Ω existem $C > 0$ e $h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tais que ¹

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq h} \sup_K |\partial^\alpha \varphi| \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(K); \quad (\text{B1.1})$$

- se $\varphi_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, ou seja, se existe K compacto em Ω tal que

$$\begin{cases} \text{supp } \varphi_j \subseteq K \text{ para todo } j, \\ \partial^\alpha \varphi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \text{ uniformemente para todo } \alpha, \end{cases}$$

$$\text{então } u(\varphi_j) \rightarrow 0.$$

◁

Definição B1.3. O menor h (se existir) tal que (B1.1) vale para todo K , é dito **ordem da distribuição**. ★

Exemplo B1.4.

1. Se $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ então $u_f : \varphi \mapsto \int f \varphi$ é uma distribuição de ordem 0:
se $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ vale $|u_f(\varphi)| \leq \left(\int_K |f| \right) \sup_K |\varphi|$;
2. se $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ então $u_f : \varphi \mapsto \int f \partial^\alpha \varphi$ é uma distribuição de ordem $|\alpha|$:
se $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ vale $|u_f(\varphi)| \leq \left(\int_K |f| \right) \sup_K |\partial^\alpha \varphi|$;
3. se μ é uma medida de Radon complexa² em Ω então $u_\mu : \varphi \mapsto \int \varphi d\mu$ é uma distribuição de ordem 0:
se $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ vale $|u_\mu(\varphi)| \leq [|\mu|(K)] \sup_K |\varphi|$;

¹Com a notação introduzida anteriormente, (B1.1) torna-se $|u(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{h,K}$

²**Medida de Radon complexa:** uma medida μ na σ -álgebra de Borel (gerada pelos abertos), a valores complexos e tal que $|\mu|$ é finita nos compactos

Exemplo:

$$\mu_0(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \in A \\ 0 & \text{se } 0 \notin A \end{cases}$$

define a distribuição **delta de Dirac**: $\delta_0 : \varphi \mapsto \varphi(0)$

4. $\delta_0^\alpha : \varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi(0)$ é uma distribuição de ordem $|\alpha|$. ★

Observação B1.5.

- Podemos **identificar** $L_{loc}^1(\Omega)$ com um subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$:
para $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ é comum dizer “a distribuição f ” para indicar $u_f : \varphi \mapsto \int f\varphi$
- o caso de $f \in L_{loc}^1$ corresponde à medida $d\mu = f dx$; em particular as medidas desta forma são as absolutamente contínuas (com respeito à med. de Lebesgue)
- a distribuição delta de Dirac: não corresponde a nenhuma função L_{loc}^1 (a medida μ_0 não é abs. contínua).
- as distribuições em 2. e 4. não correspondem a nenhuma medida de Radon. ★

Exercícios

Exercício. Mostre que a distribuição $\varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi(0)$ é realmente de ordem $|\alpha|$ e não menor; sugestão: use o Lemma A2.6. ★

Exercício. Considere as seguintes funções definidas em $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$: quais são distribuições e de que ordem?

- $\varphi \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi(k)$
- $\varphi \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} \varphi(1/k)$
- $\varphi \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} \partial^k \varphi(k)$
- $\varphi \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} \partial^k \varphi(1/k)$.
- $\varphi \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} |\varphi(k)|$. ★

Exercício. Mostre que as seguintes são distribuições em $\mathbb{R}^2$ e indique a ordem.

- $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(0, t) dt$
- $\varphi \mapsto \int_0^\pi \nabla \varphi(\cos t \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt$

- $\varphi \mapsto \int_0^\pi \nabla \varphi(\cos t \sin t) \cdot (\cos t, \sin t) dt$



B1.1 Distribuições de ordem 0

Proposição B1.6. *Uma distribuição de ordem h , pode ser estendida unicamente a um funcional linear definido em $\mathcal{C}_0^h(\Omega)$, mantendo a estimativa (B1.1).* $\triangleleft$

Corolário B1.7. **Podemos identificar as distribuições de ordem 0 com as medidas de Radon complexas.** *[usando B1.8]* $\triangleleft$

Teorema B1.8. ^a *O espaço dos funcionais lineares contínuos sobre $\mathcal{C}_0^0(\Omega)$ (com a topologia construída como a de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$) é representado pelo espaço das medidas de Radon complexas, pela identificação $L_\mu\varphi := \int \varphi d\mu$. As medidas positivas correspondem aos funcionais positivos.* $\triangleleft$

^aVeja [Fol99, Th 7.2] para o caso das medidas positivas, [Fol99, Th 7.17] faz algo parecido, mas com espaços levemente diferentes.

Proposição B1.9. *Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é tal que $u(\varphi) \geq 0$ para $\varphi \geq 0$, então é de ordem 0 e logo é uma medida (positiva e finita nos compactos).* $\triangleleft$

B1.2 Topologia em $\mathcal{D}'(\Omega)$

Em $\mathcal{D}'(\Omega)$ é útil considerar a topologia da convergência fraca-*, logo:

$u_j \rightarrow u$ significa $u_j(\varphi) \rightarrow u(\varphi)$ para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Proposição B1.10. Dada uma seq. u_j em $\mathcal{D}'(\Omega)$, se

$$u(\varphi) := \lim u_j(\varphi) \quad \text{existe para todo } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),$$

então

- para todo K compacto em Ω existem $C > 0$ e $h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tais que $|u_j(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{h,K}$ para toda $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(K)$; [usando B1.11]
- $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$
- $u_j \rightarrow u$
- se $\varphi_j \rightarrow \varphi$ em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ então $u_j(\varphi_j) \rightarrow u(\varphi)$. $\triangleleft$

Teorema B1.11 [Da Limitação Uniforme - Banach-Steinhaus].

Sejam E espaço Métrico completo F e.v.n e $A \subseteq L(E, F)$. Se $\sup_{T \in A} \|Tx\| < \infty$ para todo $x \in E$, então

existe uma viz. V da origem de E tal que $\sup_{T \in A, x \in V} \|Tx\| < \infty$.

(veja [Rud91, th 2.6]). $\triangleleft$

No caso de E esp. de Frechét gerado por seminormas p_h a conclusão é que existe $h \in \mathbb{N}$ tal que $V = \{x : p_h(x) < 1/h\}$ satisfaz a afirmação.

Exemplo B1.12.

- Se $f_j \rightarrow f$ em $L_{loc}^1(\Omega)$ então $f_j \rightarrow f$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$;
- a distribuição δ_0 pode ser obtida como $\lim u_j$ onde u_j são as distribuições associadas a uma seq. regularizante ρ_j ou seja $\rho_j \rightarrow \delta_0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$;
- também $\frac{1/n}{x^2+1/n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi \delta_0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$;
- $n^a e^{inx} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ para todo $a \in \mathbb{R}$;
- $n e^{inx} \chi_{(0,\infty)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} i\delta_0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. $\star$

Exercícios

Exercício. Verifique as afirmações do exemplo acima.



B2 Localização

Proposição B2.1. Dado o aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, um compacto $K \subseteq \Omega$ e uma cobertura aberta $\mathcal{F}$ de K , existe uma **partição da unidade sobre K subordinada a $\mathcal{F}$** : uma família finita de funções $\psi_1, \dots, \psi_k \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, a valores em $[0, 1]$ tal que

- cada suporte cabe em um elemento de $\mathcal{F}$
- $\sum \psi_i = 1$ em um aberto A : $K \subseteq A \subseteq \Omega$ $\triangleleft$

Corolário B2.2. Dado o aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ e uma cobertura aberta $\mathcal{F}$ de $\text{supp } \varphi$, existe uma família finita de funções $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, tal que

- cada suporte cabe em um elemento de $\mathcal{F}$
- $\sum \varphi_i = \varphi$ $\triangleleft$

Definição B2.3. Dada $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\Omega' \subseteq \Omega$, definimos **restrição de u a Ω'** a distribuição $u|_{\Omega'} : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega') \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \mapsto u(\varphi)$.

Se $u|_{\Omega'} = 0$ dizemos que **u se anula em Ω'** . $\star$

Proposição B2.4. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e para todo $x \in \Omega$ existe uma vizinhança $x \in V_x \subseteq \Omega$ tal que $u|_{V_x} = 0$, então $u = 0$. $\triangleleft$

Isso permite definir o suporte de uma distribuição da seguinte maneira:

Definição B2.5. O **suporte de uma distribuição u** , $\text{supp } u$, é o complementar do maior aberto U tal que $u|_U = 0$. $\star$

Em particular,

- $x \in \text{supp } u \iff \nexists$ uma vizinhança $V_x \subseteq \Omega$ de x tal que $u|_{V_x} = 0$
 $\iff$ para toda vizinhança $V_x \subseteq \Omega$ de x existe $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(V_x)$ tal que $u(\varphi) \neq 0$;
- $x \notin \text{supp } u \iff$ existe uma vizinhança $V_x \subseteq \Omega$ de x tal que $u|_{V_x} = 0$;
- se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ e vale $\text{supp } u \cap \text{supp } \varphi = \emptyset$ então $u(\varphi) = 0$.

Exercícios

Exercício. Calcule o suporte das distribuições vistas nos exemplos e exercícios anteriores. $\star$

Proposição B2.6. *Dados abertos $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^N$ e distribuições $u_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$ tais que $u_i|_{\Omega_i \cap \Omega_j} = u_j|_{\Omega_i \cap \Omega_j}$, existe uma única $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (onde $\Omega := \bigcup \Omega_i$) tal que $u|_{\Omega_i} = u_i$ para todo i . $\triangleleft$*

B3 Funcionais sobre $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ - distribuições de suporte compacto

Notação: Indicando $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ por $\mathcal{E}(\Omega)$, é comum indicar por $\mathcal{E}'(\Omega)$ o espaço dual, dos funcionais lineares e contínuos $u : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$.

Proposição B3.1. *A condição de continuidade equivale às seguintes:*

- existem $C > 0$ e $h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e um compacto K em Ω tais que

$$|u(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{h,K} \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \quad (\text{B3.1})$$

- se $\varphi_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, ou seja,

$\partial^\alpha \varphi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ uniformemente nos compactos para todo α

então $u(\varphi_j) \rightarrow 0$. ◁

Proposição B3.2.

- $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$;
- Dado $\epsilon \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $\epsilon|_{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e a mapa $\epsilon \mapsto \epsilon|_{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}$ é injetora.
- Podemos então identificar $\mathcal{E}'(\Omega)$ com um subconjunto (denso) de $\mathcal{D}'(\Omega)$. ◁

Teorema B3.3. *Dada $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, vale que³ $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ se e só se $\text{supp } u$ é compacto.*

Neste caso,

- u é de ordem finito,
- existem $C > 0$ e $h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tais que para toda $\xi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ que vale 1 em uma viz. de $\text{supp } u$,

$$|u(\varphi)| \leq C \|\xi \varphi\|_{h,\Omega} \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega); \quad (\text{B3.2})$$

- (B3.1) vale com K sendo o fecho de qualquer viz. de $\text{supp } u$ (mas C dependendo do K escolhido). ◁

Em vista do teorema, $\mathcal{E}'(\Omega)$ é dito **espaço das distribuição a suporte compacto em Ω** .

³O correto seria dizer que existe $\epsilon \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tal que $u = \epsilon|_{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}$

Exemplo B3.4.

- A distribuição $\varphi \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} \varphi(1/k)$ é de suporte compacto, logo pertence a $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$
- as distribuições $\varphi \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi(k)$ e $\varphi \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} \partial^k \varphi(k)$ não são de suporte compacto, de fato não é possível obter a estimativa (B3.1) ★

Exercícios

Exercício. Considere o exemplo (de [Hör90, ex 2.3.2])

$$u(\varphi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} (\varphi(1/n) - \varphi(0)), \quad \text{para } \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}).$$

Mostre que

- $|u(\varphi)| \leq (\sum \frac{1}{n^2}) \sup |\varphi'|$ (teorema do valor médio);
- $S = \text{supp } u = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ é compacto;
- se $\varphi = 0$ em viz de $(-\infty, 1/(j+1)]$ e $\varphi = 1$ em viz de $[1/j, \infty)$ então $u(\varphi) = \sum_{n=1}^j \frac{1}{n} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ enquanto $\sum_{|\alpha| \leq h} \sup_S |\partial^\alpha(\varphi)| = 1$;
- conclua que (B3.1) **não pode valer com $K = S$** ;
- observe que (B3.1) vale com $K = [0, 1]$ e $C = \sum \frac{1}{n^2}$, $h = 1$;
- observe que (B3.1) vale com K viz. de S , mas C deve ser tomada grande para que $\sum_{n=1}^j \frac{1}{n} \leq C$ sempre que pode ser construída uma φ como acima cujas derivadas sejam nulas em K . ★

Apesar do mostrado no exercício acima, se $\llbracket \varphi \rrbracket_{\text{ord}(u), \text{supp } u} = 0$ podemos concluir que $u(\varphi) = 0$:

Proposição B3.5. Dada $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ de ordem h , se $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ satisfaz $\partial^\alpha \varphi|_{\text{supp } u} = 0$ com $|\alpha| \leq h$, então $u(\varphi) = 0$. $\triangleleft$

Corolário B3.6. Se $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ é de ordem h e $\text{supp } u = \{p\}$ então u é da forma $\sum_{|\alpha| \leq h} c_\alpha \partial^\alpha \varphi(p)$. $\triangleleft$

B4 Derivação de distribuições

Definição B4.1. Dada $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definimos as derivadas de u como as distribuições

$$\partial^\alpha u : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi). \quad \star$$

- $\partial^\alpha u$ é sempre uma distribuição;
- a ordem (sequência) de derivação não importa;
- se u é de ordem h então $\partial^\alpha u$ é de ordem no máximo $|\alpha| + h$
- $\text{supp } \partial^\alpha u \subseteq \text{supp } u$
- a mapa $u \rightarrow \partial^\alpha u$ é linear e continua

Exemplo B4.2.

- No caso $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, se f é também suficientemente regular vale (integrando por partes)

$$(u_f)'(\varphi) = - \int f \varphi' = \int f' \varphi = u_{f'}(\varphi)$$

e iterando

$$(\partial^k u_f)(\varphi) = (-1)^k \int f \partial^k \varphi = \int \partial^k f \varphi = u_{\partial^k f}(\varphi)$$

ou seja, **identificando a função L^1_{loc} com a distribuição, a noção de derivada coincide;**

- no caso em $\mathbb{R}^N$ vale o mesmo (integrando ao longo de retas na direção de integração):

$$(\partial^\alpha u_f)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int f (\partial^\alpha \varphi) = \int (\partial^\alpha f) \varphi = u_{\partial^\alpha f}(\varphi)$$

- $\partial_x \partial_y |x| = \partial_y \partial_x |x| = 0$ como distribuições, de fato $\int |x| \varphi_{xy} = \int |x| \varphi_{yx} = 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,
- $\partial^\alpha \delta_0 = (-1)^{|\alpha|} \delta_0^\alpha : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(0)$;
por consequência as distr. de supp igual a $\{p\}$ e ordem h podem ser escritas como $\sum_{|\alpha| \leq h} c_\alpha \partial^\alpha \delta_p$ (veja corol. B3.6);
- $\partial^1 \chi_{[a,b]} = \delta_a - \delta_b$
- $\partial^1 H_0 = \delta_0$ onde $H_0 = \chi_{[0,\infty)}$ é dita **função de Heaviside** ★

Exercícios

Exercício. Verifique todas as afirmações acima. ★

Exercício. Mostre que:

- Como distribuições,

$$\frac{x}{x^2 + 1/n^2} \rightarrow (u_{\ln|x|})' \quad (\text{B4.1})$$

em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

- se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ então $\frac{u_f(x+t) - u_f(x)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} (u_f)'$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
- $\frac{\delta_t - \delta_0}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} -(\delta_0)' = \delta_0^1$ ★

Exercício.

- Calcule derivadas primeira e segunda de $|x|$
- calcule as derivadas de $e^{\lambda x} H_0(x)$ com $\lambda \in \mathbb{C}$

★

Proposição B4.3 [TFC para distr.]. Dada $u \in \mathcal{D}'(I)$ com I intervalo, existe uma primitiva $p \in \mathcal{D}'(I)$ tal que $p' = u$.

Dadas duas primitivas $p, q \in \mathcal{D}'(I)$ de u , vale $p - q = u_c$ (a distr. constante).

Por consequência,

- se $p \in \mathcal{D}'(I)$ satisfaz $p' = 0$ então é constante.
- se $p \in \mathcal{D}'(I)$ satisfaz $p^{(k)} = 0$ então é polinômio de grau até $k - 1$.

◁

Proposição B4.4. Seja $f \in \mathbb{C}^1(I \setminus \{x_0\})$ com I intervalo, tal que $f' \in L^1_{loc}(I)$.

Então existem finitos os limites laterais de f $L^\pm = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)$. Logo $u_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ é bem definida e vale $(u_f)' = u_{f'} + (L^+ - L^-)\delta_{x_0}$.

◁

B5 Produto de distribuições com funções

Definição B5.1. Dada $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ definimos o produto (ψu) como a distribuição

$$(\psi u) : \varphi \mapsto u(\psi \varphi). \quad \star$$

- ψu é sempre uma distribuição,
- se u é de ordem h então
 - ψu pode ser definida para qualquer $\psi \in \mathcal{C}^h(\Omega)$
 - ψu é de ordem no máximo h
- $\text{supp } \psi u \subseteq \text{supp } u \cap \text{supp } \psi$
- a mapa $u \rightarrow \psi u$ é linear e continua

Exercícios

Exercício. Verifique todas as afirmações acima. ★

Notação: torna-se útil a notação $u(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle$. Por exemplo as definições de derivada e de multiplicação por função tornam-se $\langle \partial u, \varphi \rangle = -\langle u, \partial \varphi \rangle$
 $\langle \psi u, \varphi \rangle = \langle u, \psi \varphi \rangle$

Exemplo B5.2.

- No caso $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, vale $\psi f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\psi u_f = u_{\psi f}$.
- $\psi \delta_0 = \psi(0)\delta_0$. Em particular $x\delta_0 = 0$ ★

Exercícios

Exercício. Mostre que $c\delta_0 : c \in \mathbb{C}$ são todas as soluções da equação em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ $xu = 0$. ★

Lema B5.3.

Vale a regra de Leibnitz para derivadas do produto:

$$\partial^\alpha(\psi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} \psi \partial^\beta u.$$

◁

Proposição B5.4. $\mathcal{E}'(\Omega)$ é denso em $\mathcal{D}'(\Omega)$ (veja Prop. B3.2) ◁

B5.1 Um pouco de EDOs

Proposição B5.5. *Se $u \in \mathcal{D}'(I)$ com I intervalo é solução da eq. em $\mathcal{D}'(I)$*

$$u' + au = f \quad (\text{B5.1})$$

com $f \in \mathcal{C}(I)$, $a \in \mathcal{C}^\infty(I)$ então $u \in \mathcal{C}^1(I)$ e a (B5.1) vale no sentido clássico^{ab}

A mesma afirmação vale para sistemas $U' + AU = F$. ◁

^aSeria mais correto formular assim: se u satisfaz $u' + au = u_f$ então $u = u_y$ onde $y \in \mathcal{C}^1(I)$ e $y' + ay = f$ em I

^bOu seja, podemos calcular u com as técnicas de EDO.

Proposição B5.6. *Se $u \in \mathcal{D}'(I)$ com I intervalo é solução da eq. em $\mathcal{D}'(I)$*

$$\sum_{j=0}^m a_j(x) u^{(j)} = f \quad (\text{B5.2})$$

com $f \in \mathcal{C}(I)$, $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{C}^\infty(I)$ e $a_m \neq 0$ em I , então $u \in \mathcal{C}^m(I)$ e a (B5.2) vale no sentido clássico. ◁

B6 Alguns exemplos importantes em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Distribuição Valor Principal de $\frac{1}{x}$:

$$PV \left[\frac{1}{x} \right] : \varphi \mapsto \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}$$

- é a derivada em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ da função $f = \ln|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (mas não é $\int \frac{\varphi(x)}{x}$ pois isso não está bem definido)
- coincide com $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1/\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$
- é de ordem exatamente 1

Distribuição Parte Finita de $\frac{1}{x^n}$:

$$PF \left[\frac{1}{x^n} \right] : \varphi \mapsto \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1/\varepsilon} \frac{\varphi(x) - T_{\varphi,0}^{n-1}(x)}{x^n}$$

- note que está bem definida pois a integranda na origem é $O(1)$ e no infinito é uma soma de potencias negativas de x , então todas convergem exceto a em $1/x$ mas esta se cancela por ser ímpar e o domínio ser simétrico
- note que para $n=1$ é o mesmo que $PV \left[\frac{1}{x} \right]$, logo é a deriv. de $\ln|x|$
- a derivada de $PF \left[\frac{1}{x^n} \right]$ é $PF \left[-\frac{n}{x^{n+1}} \right]$
- logo é (a menos do sinal e de uma constante) a derivada n^o em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ da função $f = \ln|x|$
- é de ordem no máximo n

Distribuições $\frac{1}{x \pm i0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{x \pm i0} : \varphi \mapsto \lim_{y \searrow 0} \int \frac{\varphi(x)}{x \pm iy} dx$$

- note que

$$\frac{1}{x \pm iy} = \frac{x \mp iy}{x^2 + y^2} \xrightarrow{y \searrow 0} PV \left[\frac{1}{x} \right] \mp i\pi\delta_0$$

em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, logo são distribuições;

- vale então

$$\frac{1}{x + i0} + \frac{1}{x - i0} = 2PV \left[\frac{1}{x} \right] \quad (\text{B6.1})$$

$$-\frac{1}{x + i0} + \frac{1}{x - i0} = 2\pi i\delta_0 \quad (\text{B6.2})$$

Exercícios

Exercício. Verifique as afirmações desta seção.



Referências

- [DK10] J. J. Duistermaat e J. A. C. Kolk. *Distributions*. Cornerstones. Theory and applications, Translated from the Dutch by J. P. van Braam Houckgeest. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010, pp. xvi+445. ISBN: 978-0-8176-4672-1. DOI: [10.1007/978-0-8176-4675-2](https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4675-2).
- [Fol99] G. B. Folland. *Real analysis*. Second. Pure and Applied Mathematics (New York). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, pp. xvi+386. ISBN: 0-471-31716-0.
- [Hör90] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I*. Second. Springer Study Edition. Distribution theory and Fourier analysis. Springer-Verlag, Berlin, 1990, pp. xii+440. ISBN: 3-540-52343-X. DOI: [10.1007/978-3-642-61497-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-61497-2).
- [Rud91] W. Rudin. *Functional analysis*. Second. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991, pp. xviii+424. ISBN: 0-07-054236-8.

Lista dos teoremas

B1.1	Definição (Distribuição)	B1
B1.2	Proposição (Continuidade da distr.)	B1
B1.3	Definição (Ordem da distr.)	B1
B1.4	Exemplo	B1
B1.5	Observação	B2
B1.6	Proposição (Extensão a $\mathcal{C}_0^h$)	B4
B1.7	Corolário	B4
B1.8	Teorema	B4
B1.9	Proposição (Distr. positivas)	B4
B1.10	Proposição (Limites de distr.)	B5
B1.11	Teorema (Da Limitação Uniforme - Banach-Steinhaus)	B5
B1.12	Exemplo	B5
B2.1	Proposição (Partiç. da unidade)	B7
B2.2	Corolário	B7
B2.3	Definição (Restrição de distr.)	B7
B2.4	Proposição	B7
B2.5	Definição (Suporte de distr.)	B7
B2.6	Proposição (Colagem de distr.)	B8
B3.1	Proposição	B9
B3.2	Proposição	B9

B3.3	Teorema (Distr. a supp compacto)	B9
B3.4	Exemplo	B10
B3.5	Proposição	B10
B3.6	Corolário	B10
B4.1	Definição (Derivada de distr.)	B11
B4.2	Exemplo	B11
B4.3	Proposição (TFC para distr.)	B12
B4.4	Proposição	B12
B5.1	Definição (Produto de distr.)	B13
B5.2	Exemplo	B13
B5.3	Lema (Regra de Leibnitz)	B13
B5.4	Proposição	B13
B5.5	Proposição (EDO ord. 1)	B14
B5.6	Proposição (EDO ord. m)	B14

Lista dos exercícios

Exercício	B2
Exercício	B2
Exercício	B2
Exercício	B6
Exercício	B7
Exercício	B10
Exercício	B12
Exercício	B12
Exercício	B12
Exercício	B13
Exercício	B13
Exercício	B16