

A1 Alguns livros

Referências

- [Con85] J. B. Conway. *A course in functional analysis*. Vol. 96. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1985, pp. xiv+404. ISBN: 0-387-96042-2. DOI: [10.1007/978-1-4757-3828-5](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3828-5).
- [DK10] J. J. Duistermaat e J. A. C. Kolk. *Distributions*. Cornerstones. Theory and applications, Translated from the Dutch by J. P. van Braam Houckgeest. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010, pp. xvi+445. ISBN: 978-0-8176-4672-1. DOI: [10.1007/978-0-8176-4675-2](https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4675-2).
- [Hör90] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I*. Second. Springer Study Edition. Distribution theory and Fourier analysis. Springer-Verlag, Berlin, 1990, pp. xii+440. ISBN: 3-540-52343-X. DOI: [10.1007/978-3-642-61497-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-61497-2).
- [Rud91] W. Rudin. *Functional analysis*. Second. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991, pp. xviii+424. ISBN: 0-07-054236-8.
- [Sch66] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Vol. IX-X. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg. Nouvelle édition, entièrement corrigée, refondue et augmentée. Hermann, Paris, 1966, pp. xiii+420.
- [Trè67] F. Trèves. *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Academic Press, New York-London, 1967, pp. xvi+624.

A2 Preliminares

Definição A2.1. Seja Ω um aberto em $\mathbb{R}^N$ e $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ contínua.

- definimos **suporte de ϕ** : $\text{supp } \phi := \overline{\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}}$
- definimos o espaço

$$\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) : \text{supp } \phi \text{ é um compacto em } \Omega\}. \quad \star$$

Observação A2.2. • Com a definição acima, se $\Omega \subseteq \widehat{\Omega}$ então $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subseteq \mathcal{C}_0^\infty(\widehat{\Omega})$

- Se o pedido fosse “ ϕ analítica com suporte compacto”, apenas $\phi \equiv 0$ poderia satisfazer.

★

Outras notações

Dado um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^N$

- $\mathcal{C}^k(X)$ espaço das funções contínuas com derivadas contínuas até a ordem k , definidas em X
- $\mathcal{C}^\infty(X)$ espaço das funções contínuas com derivadas contínuas de todas as ordens, definidas em X
- $\mathcal{C}_0^\infty(X) = \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) : \text{supp } \phi \text{ é um compacto em } X\}^a$

^aCuidado.. em alguns textos $\mathcal{C}_0^k$ pede as derivadas até k tendendo a zero na borda, enquanto $\mathcal{C}_c^k$ pede suporte compacto.

A2.1 Notação de multi-índice

Um **multi-índice** (em dimensão n) será um elemento de

$$MI_N = \{\alpha \in \mathbb{Z}^N : \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N\}.$$

Definimos:

- base canônica: $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ com 1 na i -ésima posição.
- *ordem* (parcial) em MI_N : $\beta \leq \alpha \iff \beta_j \leq \alpha_j$ para todo $j = 1, \dots, n$
- *Módulo* do multi-índice $\alpha \in MI_N$: $|\alpha| := \sum_{j=1}^N \alpha_j$.
- *Fatorial* do multi-índice $\alpha \in MI_N$: $\alpha! := \prod_{j=1}^N \alpha_j!$.
- *Coef. binomial* de multi-índices $\alpha, \beta \in MI_N$: $\binom{\alpha}{\beta} := \prod_{j=1}^N \binom{\alpha_j}{\beta_j}$
- *Potência* de um vetor elevado a um multi-índice:
dados $x \in \mathbb{R}^N$ e $\alpha \in MI_N$, $x^\alpha := \prod_{j=1}^N x_j^{\alpha_j}$.

- *Operador de derivação com multi-índice*: dada $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ (suficientemente regular para não importar a ordem de derivação): $\partial^\alpha u := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_N}^{\alpha_N} u$, onde $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Algumas fórmulas em notação de multi-índice:

Polinômio de Leibnitz:

$$\text{para } x \in \mathbb{R}^N, \ k \in \mathbb{N}, \quad \left(\sum_{j=1}^N x_j \right)^k = \sum_{\substack{\alpha \in MI_N \\ |\alpha|=k}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^\alpha. \quad (\text{A2.1})$$

Série de Taylor de $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ em vizinhança de x_0 :

$$S_{x_0}(x) = \sum_{\alpha \in MI_N} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha.$$

Regra de Leibniz:

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta g.$$

Derivada de potência:

$$\partial^\alpha (x^\gamma) = \frac{\gamma!}{(\gamma - \alpha)!} x^{\gamma - \alpha}.$$

A2.2 Funções test

Lema A2.3 [Algumas f.t.].

- Seja

$$\alpha(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0, \end{cases}$$

então $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

- Sejam $a < b$, $\beta_{a,b}(x) = \alpha(x-a)\alpha(b-x)$,

então $\beta_{a,b} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ e $\text{supp } \beta_{a,b} = [a, b]$.

- Sejam $a_j < b_j$, $j = 1, \dots, N$ e $\phi((x_1, \dots, x_N)) = \prod_{j=1}^N \beta_{a_j, b_j}(x_j)$,

então $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\text{supp } \phi = \prod_{j=1}^N [a_j, b_j]$.

- $\beta_{-1,1} = \exp(-2/(1-x^2)) \chi_{(-1,1)}(x)$ é par, logo

$$\psi(x) = \beta_{-1,1}(|x|) = \exp(-2/(1-|x|^2)) \chi_{(-1,1)}(|x|)$$

satisfaz $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é radial e $\text{supp } \phi = \overline{B_1(0)}$.

◁

Lema A2.4 [Normalização e reescalamiento de f.t.].

Dada $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,

- seja $\psi(x) = \phi(x)/I$ onde $I = \int_{\mathbb{R}^N} \phi$;

então $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \psi = 1$;

- seja $\varepsilon > 0$ e $\phi_\varepsilon(x) = \phi(x/\varepsilon)/\varepsilon^N$;

então $\phi_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\int_{\mathbb{R}^N} \phi_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \phi$, $\text{supp } \phi_\varepsilon = \varepsilon(\text{supp } \phi)$.

◁

Lema A2.5 [f.t. com certas propriedades].

- Dado $p \in U$ (U aberto em $\mathbb{R}^N$) existe $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

- $\phi(p) > 0$,
- $\text{supp } \phi \subseteq U$,
- $\int \phi = 1$;

- dado $p \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$ existe $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$:
 - $\phi \equiv 1$ em $B_r(p)$,
 - $\phi(x) \in [0, 1]$,
 - $\text{supp } \phi = B_{2r}(p)$.

Em conclusão, existem muitas funções em $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. ◁

Lema A2.6. Seja $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $\psi(0) = 1$ e $\text{supp } \psi = \overline{B_1(0)}$.
 Seja $\eta(x) = x^\gamma \psi(x/\varepsilon)$ e $\beta \leq \gamma$. Então

- $|\partial^\beta(\eta(x))| \leq C(\psi, \beta, \gamma) |\varepsilon|^{|\gamma-\beta|}$
- $(\partial^\beta \eta)(0) = \begin{cases} \beta! & \text{se } \beta = \gamma \\ 0 & \text{se } \beta \neq \gamma \end{cases}$ ◁

Exercícios

Exercício. Cheque todas as afirmações desta seção. ★

A2.3 Convolução

Definição A2.7.

- Dadas $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ definimos a **convolução**

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y)dy. \quad (\text{A2.2})$$

- Se $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{R}^N$, definimos a **translação** $(\tau_h f)(x) := f(x + h)$. ★

Proposição A2.8. *Se as integrais (A2.2) correspondentes existem,*

- $f * g = g * f$
- $(f * g) * h = f * (g * h)$
- $\tau_h(f * g) = (\tau_h f) * g = f * (\tau_h g)$
- $\text{supp}(f * g) \subset \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}$.

*Em particular, se os supp. de f, g são compactos então o de $f * g$ também é compacto.* ◁

Teorema A2.9. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p \leq \infty$, então,*

- $f(x - y)g(y)$ é integrável em y (para q.t.x)
- $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

◁

Proposição A2.10. *Se $f \in C_0^k(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$ então*

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^N) \text{ e } D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g, \quad |\alpha| \leq k.$$

◁

Definição A2.11. Chamamos **função regularizante** (ou molificador) uma função ρ_ε ($\varepsilon > 0$) tal que

$$\rho_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \text{supp}(\rho_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(0), \quad \int \rho_\varepsilon = 1, \quad \rho_\varepsilon \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Se $\varepsilon_n \rightarrow 0$ chamamos ρ_{ε_n} de **sequência regularizante**. ★

Proposição A2.12. *Seja ρ_n uma sequência regularizante.*

- Se $f \in C^h(\mathbb{R}^N)$ então $\partial^\alpha(\rho_n * f) \rightarrow \partial^\alpha f$ uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^N$, para todo $|\alpha| \leq h$.
- Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, então $\rho_n * f \rightarrow f$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. $\triangleleft$

Observação A2.13. As afirmações acima podem ser estendidas ao caso de funções apenas localmente integráveis, substituindo f por $f\chi_K$ com K compacto.

★

A2.3.1 Algumas consequências

Lema A2.14. Seja $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ (resp. $f \in L^1_{loc}(\Omega)$) tal que

$$\int f\phi = 0 \text{ para toda } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),$$

então $f = 0$ em Ω (resp. q.t.p em Ω). $\triangleleft$

Lema A2.15. Dado o aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e um compacto $K \subseteq \Omega$, existe $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que

- $\phi(x) \in [0, 1]$
- $\phi \equiv 1$ em K
- $|\partial^\alpha \phi| \leq C_\alpha d^{-|\alpha|}$ para oportunas constantes d, C_α . $\triangleleft$

Corolário A2.16. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aberto,

- existe uma sequência de compactos K_n tais que $K_n \subseteq K_{n+1}$ e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \Omega$ (escrevemos $K_n \nearrow \Omega$).
- existe uma sequência $\xi_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que $\xi_n = 1$ em K_n . $\triangleleft$

Lema A2.17. $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ no seguinte sentido: para toda $\phi \in \mathcal{C}_0^k(\Omega)$ existe uma sequência ϕ_i em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que todas as derivadas até a ordem k que convergem à derivada correspondente de ϕ uniformemente em compactos. Em particular $\text{supp } \phi_i$ é contido em um compacto comum. $\triangleleft$

A3 Topologias em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

1

Lembretes

- Se E espaço vetorial normado, a norma induz uma metrica e uma topologia, invariantes por translações. Se for completo é dito **esp. de Banach**.
- uma sequência de funções de Cauchy na norma uniforme converge uniformemente.
- f_n contínuas e $f_n \rightarrow f$ unif. implica f contínua;
se a.d. f_n diferenciáveis e $Df_n \rightarrow d$ unif. então f derivável e $Df = d$.

Definição A3.1.

- **esp. vetorial topológico**: esp. vet. com uma topologia que deixa contínuas as operações de esp. vetorial.
(e por consequência a topol. é invariante por translações)
 - **e.v.t. loc.convexo**: se existe base local feita por convexos
 - **e.v.t. completo**: toda rede de cauchy converge, onde rede de cauchy : para toda V viz. de 0, existe N tal que $x_k - x_n \in V$ para $k, n \geq N$ grande .
- **Esp. de Fréchet**: e.v.t. loc.convexo, com métrica (invariante), completo.
- Um e.v.t. possui a **propriedade de Heine-Borel** se seus conjuntos fechados e limitados² são compactos. ★

Teorema A3.2. *Seja E e.v. e $\{p_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ uma família de seminormas separantes.³*

Então

$$V_n^\alpha = \{x : p_\alpha(x) < 1/n\}$$

é uma sub-base de vizinhanças de 0 e a topologia gerada torna E um e.v.t. loc. convexo e Hausdorff.

Além disso

¹Os assuntos neste capítulo são tomados de várias fontes, principalmente [Rud91] e a seguir [Trè67; Con85; Sch66].

²**Conjunto limitado** é um conjunto contido num múltiplo de qualquer viz. da origem

³**Seminormas separantes** significa que $p_\alpha(x) = 0 \forall \alpha \in \mathcal{A} \iff x = 0$

- as p_α são contínuas nesta topologia,
- $C \subseteq E$ é limitado $\iff$ todas as $p_\alpha|_C$ são limitadas.
- Se $\mathcal{A} = \mathbb{N}$ então $d(x, y) := \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x, y)}{1 + p_n(x, y)}$ é uma métrica invariante que induz a topologia acima (mas $d(x, 0)$ não é uma norma).

◁

A3.1 Topologias em $\mathcal{C}_0^\infty(K)$ e $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$

Notação: Para simplificar formulas adotaremos a notação^{ab}

$$\|\phi\|_{h,X} = \sum_{|\alpha| \leq h} \sup_X |\partial^\alpha \phi|$$

^aCaso o conjunto seja subentendido, escreveremos apenas $\|\phi\|_h$

^bUma outra possível escolha é $\|\phi\|_{h,X} = \sup_{|\alpha| \leq h} \sup_X |\partial^\alpha \phi|$: as formulações obtidas são equivalentes.

Seja K um compacto e Ω um aberto:

- $\mathcal{C}^h(K)$ é **espaço vetorial normado completo** com a norma

$$\|\phi\|_{\mathcal{C}^h(K)} := \|\phi\|_{h,K}.$$

Convergência neste espaço é conv uniforme de todas as derivadas de ordem 0 até h . O que implica na completeza.

- $\mathcal{C}_0^\infty(K)$ e $\mathcal{C}^\infty(K)$ são **espaços de Fréchet** e possuem a **propriedade de Heine-Borel**.

- $p_h(\phi) = \|\phi\|_{h,K}$: é seq. de normas separantes, logo valem as propriedades do Teorema A3.2.
- Convergência neste espaço é conv uniforme de todas as derivadas, o que implica na completeza e na propriedade de He-Bo (via T. de Ascoli-Arzelá) logo é esp. de Fréchet
- uma base local enumerável e decrescente é

$$V_h = \left\{ \phi : \|\phi\|_{h,K} < 1/h \right\} : h \in \mathbb{N}$$

- $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ também é **espaço de Fréchet** e possui a **propriedade de Heine-Borel**: .

- definimos

$$\widehat{p}_h(\phi) = \|\phi\|_{h,K_h} ,$$

onde os compactos $K_h \nearrow \Omega$:⁴ elas são bem definidas mas são apenas seminormas (separantes).

- Convergência neste espaço é conv uniforme em compactos, de todas as derivadas.
- uma base local enumerável e decrescente é

$$V_h = \left\{ \phi : \|\phi\|_{h,K_h} < 1/h \right\} : h \in \mathbb{N}$$

- $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$: a mesma construção não é útil:
 - as $\|\cdot\|_{h,\Omega}$ ainda são normas separantes, mas o resultado não seria completo (uma seq. de Cauchy pode ter limite cujo suporte não é um compacto)
 - para te-lo completo preciso uma topologia mais fina: onde a noção de convergência é mais forte (logo menos seq. de cauchy e menos seq conv).

⁴Escreveremos $K_h \nearrow \Omega$ para dizer que os K_h são uma sequência crescente de conjuntos cuja reunião é Ω

A3.2 Construção da topologia em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

Limite indutivo

Seja K_n uma sequência crescente de compactos tal que $\Omega = \bigcup K_n$ e sejam $(\mathcal{C}_0^\infty(K_n), \mathcal{T}_n)$ os espaços de Fréchet vistos.

Assim

- $\mathcal{C}_0^\infty(K_n)$ é subespaço topológico de $\mathcal{C}_0^\infty(K_{n+1})$,
- $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \bigcup \mathcal{C}_0^\infty(K_n)$.

Em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ definimos a topologia $\mathcal{T}$ gerada pela base local em 0:

$$\mathcal{B}_0 = \{W \text{ convexo balanceado} : W \cap \mathcal{C}_0^\infty(K_n) \in \mathcal{T}_n\}$$

¹ C conjunto **balanceado** significa que $\lambda C \subseteq C$ para $|\lambda| \leq 1$

²Esta construção é chamada **limite indutivo**: o e.t. $(\mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \mathcal{T})$ é o limite indutivo da sequência dos espaços $(\mathcal{C}_0^\infty(K_n), \mathcal{T}_n)$. Veja [Trè67, Cap 13], [Con85, cap iv.5], [Sch66, pag 63...]

Exemplo A3.3. Algumas viz. abertas de 0 em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$:

- $\{\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) : \sup_F |\partial^\alpha \phi| < \varepsilon\}$ para dados $\alpha \in MI_N$, F fechado em Ω ,
- interseções finitas dos acima
- interseções quaisquer dos acima desde que cada K_n intersecte apenas finitos dos F
- em particular uma base (não enumerável) de viz. de 0 é

$$\{\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) : \sup_{F_n} |\partial^\alpha \phi| < \varepsilon_n \text{ para } |\alpha| \leq h_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

sendo $\{\varepsilon_n\}, \{h_n\}$ seq. arbitrárias e $F_n = \overline{\Omega \setminus K_n}$ (tomando $K_1 = \emptyset$).



Propriedades (veja [Rud91, Teor 6.4 e 6.5])

- $(\mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \mathcal{T})$ é e.v.t. loc. convexo, Hausdorff e sequencial^a
- cada $\mathcal{C}_0^\infty(K_n)$ é subespaço topológico de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ e é fechado;
- se $B \subseteq \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é limitado então
 - existe K compacto em Ω tal que $B \subseteq \mathcal{C}_0^\infty(K)$,

- $\sup_{|\alpha| \leq h, x \in \Omega} |\partial^\alpha \phi(x)|$ é limitado em B para todo h
- vale a propriedade de Heine-Borel
- se ϕ_j é seq. de Cauchy em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ (em particular se $\phi_j \rightarrow 0$) então $\{\phi_j\} \subseteq \mathcal{C}_0^\infty(K)$ para algum $K \subseteq \Omega$ e vale $p_h(\phi_j - \phi_k) \rightarrow 0$ para $j, k \rightarrow \infty$, para todo h ,
ou seja, estas seq. **tem suporte em um mesmo K fixado e convergem uniformemente com todas as derivadas**;
- $(\mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \mathcal{T})$ é completo.

^a**espaço sequencial** significa que as propriedades topológicas podem ser caracterizadas por seqüências, sem precisar de redes.

A3.3 Operadores contínuos

Lembrete

Seja $T : E \rightarrow F$ linear onde E, F são e.v.n.

Definição. T é dita **limitada** se $\exists c \geq 0$ tal que $\|Tx\|_F \leq c\|x\|_E, \forall x \in E$. ★

Proposição A3.4. *São equivalentes:*

1. T é contínua ($\iff T$ é contínua em 0),
2. T é limitada.
3. $x_n \rightarrow 0$ implica $Tx_n \rightarrow 0$. ◁

O caso e.v.t.

Seja $T : E \rightarrow F$ linear onde E, F são e.v.t.

Definição. T é dita **limitada** se a imagem de limitados é limitada. ★

Proposição A3.5. (*[Rud91, Th 1.32]*) *As afirmações a seguir:*

1. T é contínua ($\iff T$ é contínua em 0),
2. T é limitada

3. $x_n \rightarrow 0$ implica Tx_n limitada

4. $x_n \rightarrow 0$ implica $Tx_n \rightarrow 0$

sao **equiv.** se X é **metrico**, caso contrario **apenas temos** $1 \implies 2 \implies 3$
(em particular, limitada pode não implicar contínua). $\triangleleft$

O caso de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

Teorema A3.6. ([Rud91, Th 6.6]). Se $T : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \rightarrow F$ com F e.v.t. loc. convexo, são equivalentes:

1. T é contínua
2. T é limitada
3. $\phi_i \rightarrow 0$ em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ então $T\phi_i \rightarrow 0$ em F
4. $T|_{\mathcal{C}_0^\infty(K)}$ é contínua para todo K compacto em Ω .

$\triangleleft$

Corolário A3.7. $D^\alpha : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é sempre contínua. $\triangleleft$

Lista dos teoremas

A2.1	Definição	A1
A2.2	Observação	A1
A2.3	Lema (Algumas f.t.)	A4
A2.4	Lema (Normalização e reescalamiento de f.t.)	A4
A2.5	Lema (f.t. com certas propriedades)	A4
A2.6	Lema	A5
A2.7	Definição	A6
A2.8	Proposição (convolução)	A6
A2.9	Teorema (convolução em L^p)	A6
A2.10	Proposição (convolução $\mathcal{C}_0$ - L^1)	A6
A2.11	Definição (seq. regularizante)	A6
A2.12	Proposição (conv. seq. regularizada)	A6
A2.13	Observação	A7
A2.14	Lema	A7
A2.15	Lema	A7
A2.16	Corolário	A7
A2.17	Lema	A7
A3.1	Definição	A8
A3.2	Teorema	A8
A3.3	Exemplo	A11
	Definição (Aplic. lin. limitada)	A12
A3.4	Proposição (Caracteriz. continuidade)	A12
	Definição (Aplic. lin. limitada)	A12
A3.5	Proposição (Caracteriz. continuidade)	A12
A3.6	Teorema	A13
A3.7	Corolário	A13

Lista dos exercícios

Exercício	A5
---------------------	----