C1 Sequências e séries de funções

Chamamos **Sequência de funções** uma sequência cujos elementos são funções de um domínio D fixado:

$$\{f_n : \ D \to \mathbb{R}\}_{n \in N}$$

onde $N \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Exemplo C1.1. Com $D = \mathbb{R}$:

- $f_n(x) = nx$
- $g_n(x) = x/n$
- $h_n(x) = x^n$;
- $f_n(x) = \sin(nx)$;
- $g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$;
- $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$
- $g_n(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+x^2}}$
- $f_n(x) = arctan(x+n)$;
- $f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \le x \le 1/n \\ (2-nx) & 1/n \le x \le 2/n \\ 0 & x > 2/n \ ou \ x < 0 \end{cases}$
- $g_n(x) = \begin{cases} n^2x & 0 \le x \le 1/n \\ n(2-nx) & 1/n \le x \le 2/n \\ 0 & x > 2/n \ ou \ x < 0 \end{cases}$

Com $D = (0, \infty)$ e $\alpha > 0$:

- $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^\alpha} & x \ge 1/n \\ n^\alpha & x < 1/n \end{cases}$;

(Veja em Graficos em Geogebra) ★

C1.1 Convergência pontual e uniforme

Dada uma sequência de funções

$$\{f_n : D \to \mathbb{R}\}_{n \in N}$$

e fixados $A \subseteq D$ e $f : A \to \mathbb{R}$,

- dizemos que f_n **converge pontualmente a** f **em** A se para todo $x \in A$ vale $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
- então dizemos que f **é o limite pontual de** f_n **em** A: $\boxed{f_n \to f \text{ pont. em } A}$.
- **o conjunto de convergência pontual de** f_n é o maior $A \subseteq D$ tal que a seq. numérica $f_n(x)$ converge para todo $x \in A$

Exemplo C1.2. Discuta a convergência pontual das sequências do exemplo C1.1 ★

Dada uma sequência de funções

$$\{f_n : D \to \mathbb{R}\}_{n \in N}$$

e fixados $A \subseteq D$ e $f : A \to \mathbb{R}$,

- dizemos que f_n **converge uniformemente a** f **em** A se

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right] = 0$$

- então dizemos que f **é o limite uniforme de** f_n **em** A: $\boxed{f_n \to f \text{ unif. em } A}$.
- note que pode não existir um maior $A \subseteq D$ tal que a seq. f_n convirja uniformemente em A.

Observação C1.3 (Comparação das definições).

- $f_n \to f$ pontualmente em A: $\boxed{\text{para todo } x \in A \text{ vale } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)}$:
  $\boxed{\forall x \in A}$, $\forall \varepsilon > 0$ existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $n > H \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
  H depende de ε e de x também
- $f_n \to f$ uniformemente em A:
  $\forall \varepsilon > 0$ existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $n > H \implies \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
  $\forall \varepsilon > 0$ existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $n > H \implies \boxed{|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}}$:
  H depende de ε apenas e deve servir para todo x.

★

Proposição C1.4.

- *se* $B \subseteq A$ *e* $f_n \to f$ *em* $A \implies f_n \to f$ *em* B *(unif/pont)*
- $f_n \to f$ *unif. em* $A \implies f_n \to f$ *pont. em* A

◁

Procedimento para estudar convergência uniforme:

1. calculo limite pontual f e conj. de conv. pont. A
2. procuro $B \subseteq A$ tal que $f_n \to f$ unif. em B.

Exemplo C1.5. $x^n \to f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ pontualmente em $[0,1]$, mas não uniformemente.

$x^n \to 0$ pontualmente em $[0,1)$, mas não uniformemente.
$x^n \to 0$ uniformemente em $[0,p]$ para todo $p \in (0,1)$.
(Veja em Grafico em Geogebra) ★

C1.2 Teoremas de passagem ao limite

Dada uma sequência de funções f_n, dizemos que é **uniformemente de Cauchy em A** se

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ existe } H > 0\text{: } p, m > H \implies |f_p(x) - f_m(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in A$$

Teorema C1.6.

- *se f_n é uniformemente de Cauchy em A e $f_n \to f$ pont. em A, então $f_n \to f$ unif. em A*
- $\boxed{f_n \text{ é unif. de Cauchy em } A \iff f_n \text{ converge unif. a alguma } f \text{ em } A}$

◁

Teorema C1.7. *Suponha que a sequência de funções $f_n(x)$ convirja uniformemente a f em A;*

0) se cada f_n é limitada em A então f é limitada em A

1) se x_0 é p.d.a de A e, para todo n, $\exists \lim_{x\to x_0} f_n(x) = L_n$ então

$\boxed{\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} L_n \in \mathbb{R}}$

2) se cada f_n é cont. em A então f é cont. em A

3) se cada f_n é integrável em $[a, b] \subseteq A$ então f integrável em $[a, b]$ e

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)}$$ ◁

CUIDADO: não vale que se as f_n são deriv. então f é derivável!!!

Teorema C1.8. *Suponha que a sequência de funções deriváveis $f_n(x)$ convirja em pelo menos um ponto em $[a, b]$ e que f_n' convirja uniformemente em $[a, b]$ a uma função d.*
Então $f_n \to f$ unif em $[a, b]$, onde f é derivável e $f' = d$. ◁

Observação C1.9. As afirmações dos teoremas acima poderiam ser falsas assumindo apenas convergência potual!! ★

Observação C1.10.

- x^n não converge uniformemente em $[0,1]$: o limite não é contínuo.
- $\arctan(x+n)$ não converge uniformemente em $\mathbb{R}$: $\lim_{x\to-\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \pi/2 \neq -\pi/2 = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$
- $f_n(x) = \frac{\sqrt{1+n^2x^2}}{n}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$ mas f_n' não converge uniformemente em $\mathbb{R}$: o limite não é derivável.
- $f_n(x) = \begin{cases} n^2x & 0 \leq x \leq 1/n \\ n(2-nx) & 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & x > 2/n \text{ } ou \text{ } x < 0 \end{cases}$; não converge uniformemente em $\mathbb{R}$: a integral do limite não é o limite da integral
- $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^\alpha} & x \geq 1/n \\ n^\alpha & x < 1/n \end{cases}$ não converge uniformemente em $(0,\infty)$: o limite não é limitado.

★

C2 Séries de funções

Chamamos **Série de funções** a soma dos termos de uma sequência de funções: dada uma sequência de funções f_n, chamamos

- $S_k(x) = \sum_{n=n_0}^{k} f_n(x)$ **sequência (de funções) das somas parciais**
- definimos a **Série** associada à f_n sendo

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n := \lim_{k\to\infty} S_k \qquad \text{(limite pontual)}$$

Exemplo C2.1.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ converge pontualmente a $S(x) = \dfrac{x}{1-x}$ em $(-1, 1)$.
- $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge pontualmente em $\mathbb{R}$.

★

Dizemos que a série converge uniformemente em A se S_k converge uniformemente em A, em particular

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em A à função $S(x)$, se

$$\lim_{k\to\infty}\left[\sup_{x\in A}\left|S(x) - \sum_{n=1}^{k} f_n(x)\right|\right] = 0$$

Teorema C2.2 [Test de Weiestrass].
Se $\sup_{x\in A}|f_n(x)| \le a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em A. ◁

Observação C2.3. A condição é apenas suficiente: mesmo não valendo a série poderia convergir uniformemente. ★

Teorema C2.4. *Suponha que a série $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ convirja uniformemente em A;*

0) se cada f_n é limitada em A então S é limitada em A

1) se x_0 é p.d.a de A e $\exists \lim_{x\to x_0} f_n = L_n$ então $\exists \lim_{x\to x_0} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n \in \mathbb{R}$

2) se cada f_n é cont. em A então S é cont. em A

3) se cada f_n é integrável em $[a,b] \subseteq A$ então S integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,dx \right)$$

$\triangleleft$

CUIDADO: não vale que se as f_n são deriv. então S derivável!!!

Teorema C2.5. *Suponha que a série $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ com f_n deriváveis convirja em pelo menos um ponto em $[a,b]$, enquanto $D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente em $[a,b]$.*

Então S converge unif. em $[a,b]$, é derivável e $S' = D$.

$\triangleleft$

Exercício C2.6. Discuta a convergência pontual e uniforme das series a seguir, e a continuidade e derivabilidade de suas somas.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$
- $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$

$\bigstar$

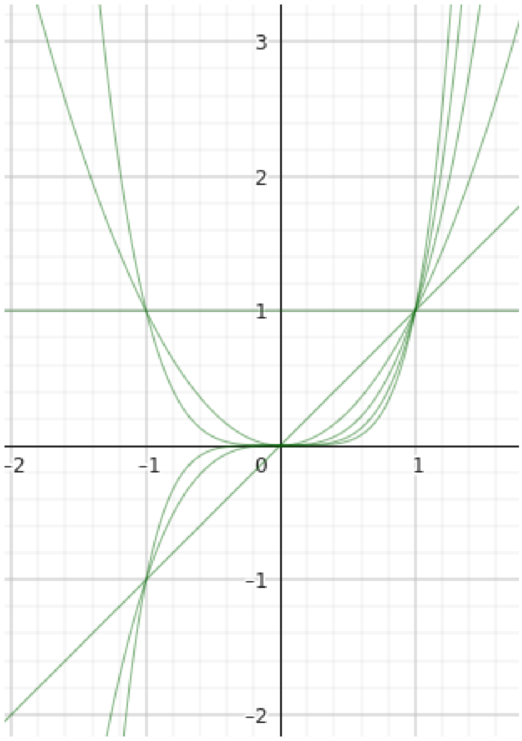

Figura 1:

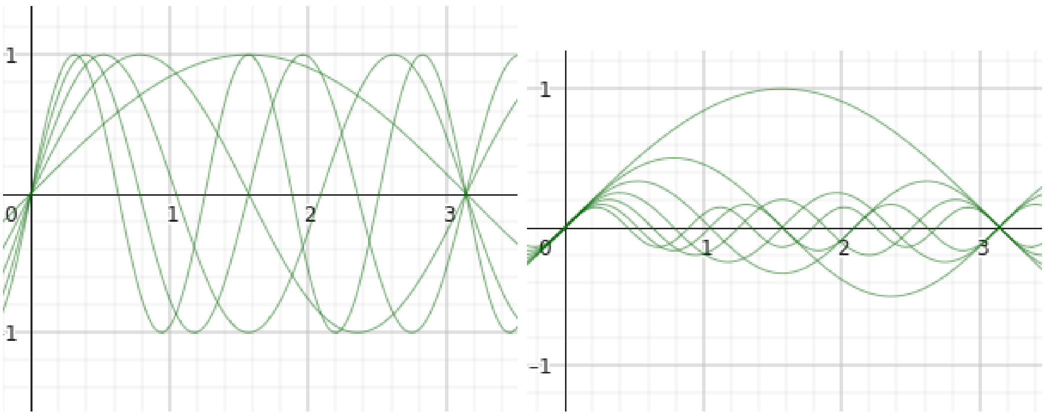

Figura 2:

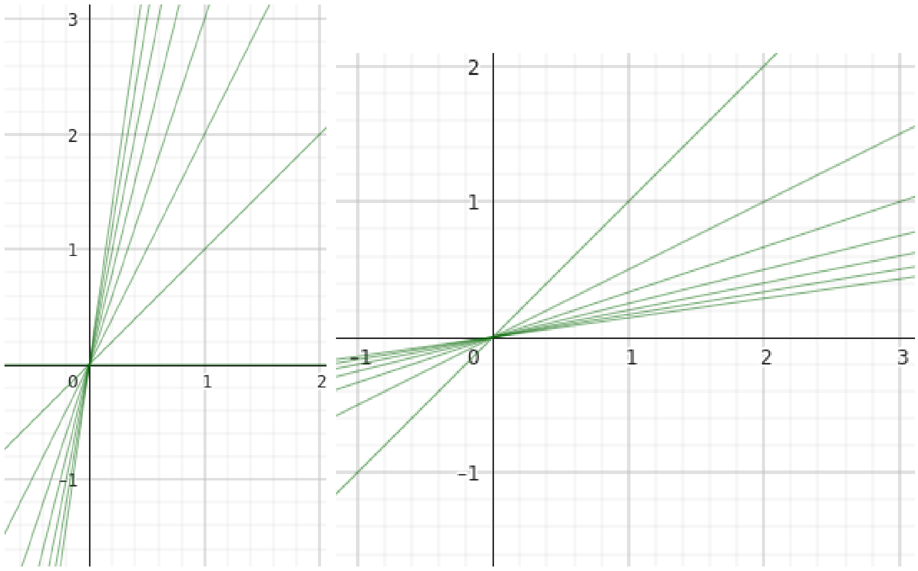

Figura 3:

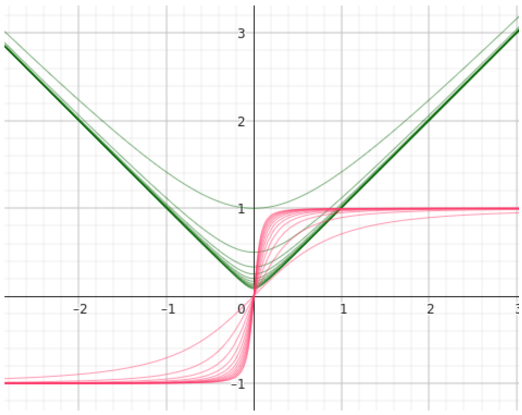

Figura 4:

Conteúdo

Lista dos teoremas

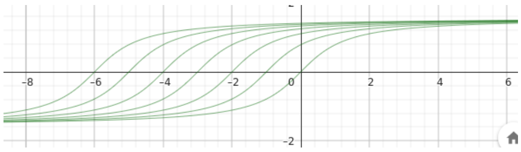

Figura 5:

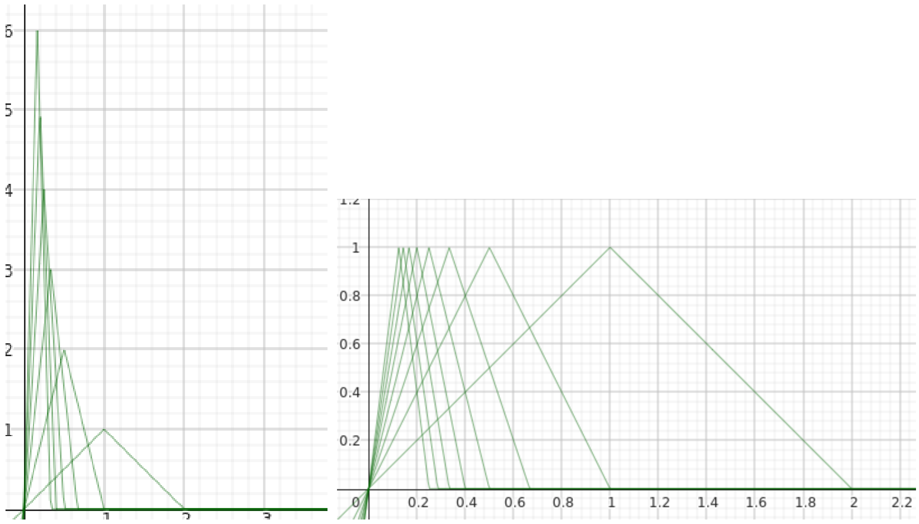

Figura 6: